Andijan State University
Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Science
National University of Uzbekistan

CONTROL, OPTIMIZATION AND DYNAMICAL SYSTEMS

CODS-2019

Scientific Conference

ABSTRACTS

УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ – CODS-2019

Республиканская научная конференция
с участием зарубежных ученых

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Andijan, Republic of Uzbekistan, 17-19 October 2019

Andijan State University named after Z.M.Babur
Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Science
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

Scientific Conference

CONTROL, OPTIMIZATION AND DYNAMICAL SYSTEMS

dedicated to the 80^{th} birthday of
Numan Yunusovich Satimov
(1939-2006)

ABSTRACTS

Andijan, Republic of Uzbekistan, 17-19 October 2019

Андижанский государственный университет им. З.М.Бабура
Институт математики АН РУз
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека

Республиканская научная конференция
с участием зарубежных ученых

УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

к 80-летию со дня рождения
Нумана Юнусовича Сатимова
(1939-2006)

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Андижан, Республика Узбекистан, 17-19 октября 2019 г.

Academician Numan Yunusovich Satimov

Академик Нуман Юнусович Сатимов

(1939-2006)

Scientific Conference

CONTROL, OPTIMIZATION AND DYNAMICAL SYSTEMS – 2019

dedicated to the 80th birthday of
Numan Yunusovich Satimov
(1939-2006)

Andijan, Republic of Uzbekistan, 17-19 October 2019

ORGANIZERS

Andijan State University
Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Science
National University of Uzbekistan

Organizing committee

Azamov A.A.(*Chairman, Institute of Mathematics*)
Marakhimov A.(*Co-chairman, Rector of NUUz*)
Yuldashev A.S.(*Co-chairman, Rector of AndSU*)
Makhkamov M.K.(*deputy chairman, AndSU, Dean*)
Zaynabiddinov S., Farmanov Sh.K.,
Zikirov O.S., Mamatov M.Sh.,
Otaqulov S., Samatov B.T.,
Tukhtasinov M., Tadjiev M.,
Urinov A.K., Ahlimirzaev A.,
Akhmedov O.S., Boytillaev D.,
Ibaydullaev T., Iskanajiev I.M.,
Isroilov I., Kadirov K.P.,
Mamadaliev N., Ruziboev M.,
Umrzakov N., Satimova G.N.

Programm Committee

Ayupov Sh.A.(*Chairman*),
Petrosyan L.A.(*Co-chairman*),
Lukoyanov N.Yu., Alimov Sh.A.,
Zelikin M.I., Sadullaev A.S.,
Subbotina N.N., Ushakov V.N.,
Khadjiev Dj.Kh., Chentsov V.G.,
Aripov M.M., Arzikulov F.N.,
Arutyunov A.V., Akhmedov A.A.,
Ganikhojaev N.N., Ganikhojaev R.N.,
Djalilov A.A., Zarina Bibi Ibrahim,
Ibragimov G.I., Habshah Midi,
Sharifah Kartini Said Husain,
Idham Arif Alias, Narmanov A.Ya.,
Nikol'skii M.S., Petrov N.N.,
Polovinkin E.S., Rakhimov I.R.,
Rozikov U.A., Ukhobotov V.I.,
Fathulla Ali Rihan, Fayazov K.S.,
Khodjibaev V.R., Chilin V.I., Yugay L.P.

Secretary of the Conference

Abdiolimova G., Abdurakhmonov B.,
Bakhromov J., Begaliev A.,
Bekimov M., Sotvoldiyev A.,
Mustapoqulov Kh.Ya., Ro'zimurodova D.,
Satimova D.N., Tilavov A.M.,
Khayitkulov B.

Республиканская научная конференция
с участием зарубежных ученых

УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ-2019

посвященная 80-летию со дня рождения
Нумана Юнусовича Сатимова
(1939-2006)

Андижан, Республика Узбекистан, 17-19 октября 2019 г.

ORGANIZERS

Андижанский государственный университет
Институт математики АН РУз
Национальный университет Узбекистана

Организационный комитет

Азамов А.А.(*председатель, Институт математики*)
Marakhimov A.(*сопредседатель, ректор НУУз*)
Yuldashev A.S.(*сопредседатель, ректор АндГУ*)
Makhkamov M.K.(*заместитель председателя, АндГУ, декан*)
Зайнабиддинов С., Фарманов Ш.К., Зикиров О.С., Маматов М.Ш., Отакулов С., Саматов Б.Т., Тухтасинов М., Таджиев М., Уринов А.К., Ахлимирзаев А., Ахмедов О.С., Бойтиллаев Д., Ибайдуллаев Т., Исканажиев И.М., Исроилов И., Кадиров К.Р., Мамадалиев Н., Рузибаев М., Умрзаков Н., Сатимова Г.Н.

Программный комитет

Аюпов Ш.А.(*председатель*), Петросян Л.А.(*сопредседатель*), Лукоянов Н.Ю., Алимов Ш.А., Зеликин М.И., Садуллаев А.С., Субботина Н.Н., Ушаков В.Н., Хаджиев Дж.Х., Ченцов В.Г., Арипов М.М., Арзикулов Ф.Н., Арутюнов А.В., Ахмедов А.А., Ганихужаев Н.Н., Ганихужаев Р.Н., Джалилов А.А., Зарина Биби Ибрахим., Ибрагимов Г.И., Хабшах Мади, Шарифах Картини Саид Хасаин, Идхам Ариф Иляс., Нарманов А.Я., Никольский М.С., Петров Н.Ник., Половинкин Е.С., Рахимов И.Р., Розиков У.А., Ухоботов В.И., Фатхулла Али Рихан, Фаязов К.С., Ходжибаев В.Р., Чилин В.И., Югай Л.П.

Секретариат конференции

Абдиолимова Г., Абдурахмонов Б., Бахромов Ж., Бегалиев А., Бекимов М., Сотволдиев А, Мустапокулов Х.Я., Рузимуродова Д., Сатимова Д.Н., Тилавов А.М., Хайиткулов Б.

Contents. Оглавление

Qualitative Theory of Dynamical Systems
Качественная теория динамических систем

Differential Equations. Дифференциальные уравнения

Applied Mathematics and Mathematical Modelling
Прикладная математика и математическое моделирование

Academician N.Yu.Satimov

Numan Yunusovich Satimov was one of Uzbek prominent scientists, Doctor of Physical and Mathematical sciences, professor, full Member of Uzbekistan Academy of Science and laureate of the Abu Reyhan Beruni State prize of Uzbekistan.

N.Yu.Satimov was the a creator of the Tashkent school on the Theory of Control and Differential Games, who made a huge personal contribution to develop this field of Mathematics.

N.Yu.Satimov was born on December 15, 1939 in Andijan city; he studied at school number 29. In 1956 he entered the Physics and Mathematics Faculty of Central Asia State University in Tashkent (now the National University of Uzbekistan, NUUz). Since 1958 he continued his studies at the Mechanics and Mathematics Faculty of Moscow State University named after M.V Lomonosov. After his graduation, in 1962 he entered the postgraduate courses of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of Uzbekistan Academy of Science; in 1965-1968 he worked as a junior research fellow of the above-mentioned institute.

Since 1968 N.Yu.Satimov moved to Tashkent State University, where since 1971 he was a head of the Department of Applied Mathematics. In 1974-1976 he was a senior researcher at the V.A.Steklov Mathematical Institute of USSR Academy of Science in Moscow, and after returning from Moscow he continued to govern the department. In 1985-1987, N.Yu.Satimov was the dean of the Department of Applied Mathematics and Mechanics. Since 2000 he was a Senior Researcher of Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan.

In 1968 N.Yu.Satimov defended his candidate (PhD) thesis, and in 1977 at the specialized council of the V.A.Steklov Institute of Mathematics his Doctor of Science thesis. In 1978, he was awarded the title of Professor; in 1979 he was elected a Corresponding Member, in 2000 a full member of Uzbekistan Academy of Science.

N.Yu.Satimov was known as one of the leading specialists in the Theory of Differential Equations and Control Theory and their applications.

He published a textbook on Differential Equations, two monographs, over 180 scientific papers, most of them were published in English being translated from Russian.

Since 1970, a group of mathematicians, headed by N.Yu.Satimov began to study in a new field of Mathematics called the Theory of Controlled Processes chiefly the Theory of differential pursuit-evasion games. N.Yu.Satimov himself was engaged mainly in the development of the methods of L.S.Pontryagin.

One of his important results was modification of the first method of Pontryagin for the pursuit problems. The method of N.Yu.Satimov reinforces the first method of L.S.Pontryagin, preserving its convenience; in particular, anticipatory discrimination of the evader is not required. Moreover, for all substantial examples, he gives the same result as the second method of L.S.Potryagin.

A large cycle of works by N.Yu.Satimov is devoted to the problem of escape. Moreover, it should be mentioned that the scientist developed the new method of evading in a direction that has found effective applications in the study of games with several pursuers. He also proved theorems that improve sufficient conditions for the possibility of evading had been obtained by L.S.Pontryagin and R.V.Gamkarlidze, M.S.Nikolsky and others.

Since 2000, N.Yu.Satimov has been intensively engaged in control problems in systems with distributed parameters. He proposed a new approach to the study of controlled physical processes described by partial differential equations. Additionally, N.Yu.Satimov owns the results related to the problem of constructing a differential equation with given properties, strengthening the Vallee-Poussin theorem on the zeros of solutions, discrete and differential games with integral constraints.

In his general academic and special discipline, they were distinguished by thoroughness and accessibility for students. He had a beneficial effect on the formation of many mathematicians in Uzbekistan and the CIS countries. Under his leadership, 8 Doctor of Science and more than 20 candidates (PhD) were trained.

N.Yu.Satimov was not only a scientist and teacher of bright talent, but also a sincere friend, a generous mentor, a wonderful family man, a caring father. His cheerfulness and industriousness, responsiveness, modesty, honesty and integrity left a lasting impression on everyone who spoke and worked with him. It was not easy to argue with him because of his high education and erudition. Until the last days of his life, he regularly engaged in mini-soccer and table tennis, was an excellent swimmer, and loved to travel.

The memory of N.Yu.Satimov will be preserved in the hearts of his colleagues and students, and the scientific school he founded will continue to develop.

Optimal Processes and Differential Games
Оптимальные процессы и дифференциальные игры

(α, β, γ)-Derivations of Leibniz Algebras

A.Abdulkadir[1], **Sh.K.Said Husain**[2,*], **W.Basri**[3]
[1,2,3] *Institute for Mathematical Research (INSPEM), Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia*
[2,3] *Department of Mathematics, Faculty of Science, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia*

There are several approaches to the study of generalized derivation of algebras. In 2000, Leger and Luks [1] studied a general version defining the generalized derivation of Lie algebra. Hartwig et al. [2] in 2003, discuss the concept of generalized derivations of Lie algebras and they refer to it as (σ, τ)-derivation. Also the works by Hrivnak [3] and Novotny and Hrivnak [4] introduced the new version of a generalized derivation of Lie algebras. They found the important results called (α, β, γ)-derivation of Lie algebras.

Some works extended the idea of Novotny and Hrivnak to several type of algebra like associative and diassociative algebras by Rakhimov et al. [5] and Fiidow et al. [6] respectively. Our interest in this paper is to study the generalized derivations of finite dimensional Leibniz algebras. The algebra of derivations and generalized derivations are very useful in algebraic and geometric classification problems of algebras.

Set us begin with simple definitions and facts needed later on in the course of our discussions. The definitions of a Leibniz algebras, and some of its basic properties can be found in [7] and [8].

Definition. *A Leibniz algebra L is a vector space V over a field $\mathbb{C}$ equipped with a bilinear mapping $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ which satisfies the following identity;*

$$[x, [y, z]] = [x, y], z]] - [x, [y, z]], \ \forall x, y \in L.$$

Note that for all $x \in L$ if the identity $[x, x] = 0$ holds then the Leibniz identity becomes Lie, hence Leibniz algebras are non commutative analogue of Lie algebras.

From [4], the definition of (α, β, γ)-derivation of Leibniz algebras can be written as follows:

Definition. *Let $(L, [\cdot,\cdot])$ be a Leibniz algebra, the linear operator $d \in EndL$ is an $(\alpha, \beta, \gamma)-$derivation of L if $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ such that for all $x, y \in L$, the following condition is satisfied;*

$$\alpha d([x, y]) = \beta[d(x), y] + \gamma[x, d(y)].$$

The set of all (α, β, γ)-derivation of L is denoted as $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L$ and can be written as:

$$Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L = \{d \in EndL | \alpha d[x,y] = \beta[d(x),y] + \gamma[x,d(y)], \forall x,y \in L\},$$

where $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L$ is a subspace of $EndL$.

Proposition. *Let $f : L_1 \to L_2$ be an isomorphism of complex Leibniz algebras $(L_1, [\cdot,\cdot]_1)$ and $L_2, [\cdot,\cdot]_2)$. Then the map $g : EndL_1 \to EndL_2$ defined by $g(d) = fdf^{-1}$ is an isomorphism of vector spaces $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L_1$ and $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L_2$.*

From the definition of (α, β, γ)-derivation by Novotny and Hrivnak [4] it follows that for any $\epsilon \neq 0 \in \mathbb{C}$ the following relationship holds true;

$$Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L = Der_{(\epsilon\alpha,\epsilon\beta,\epsilon\gamma)}L = Der_{(\alpha,\gamma,\beta)}L.$$

Corollary. *Let L be a Leibniz algebra. For any $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, the following is true*

$$Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L = der_{(0,\beta-\gamma,\gamma-\beta)}L \cap Der_{(2\alpha,\beta+\gamma,\beta+\gamma)}L.$$

Another important result is about the intersection of two different subspaces of $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L$, which gives another independent invariant. Now consider the following proposition:

Proposition. *Let $f : L_1 \to L_2$ be an isomorphism of two Leibniz algebras L_1 and L_2, then the map $g : EndL_1 \to EndL_2$ defined by $g(d) = fdf^{-1}$ is an isomorphism of vector spaces $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L_1 \cap Der_{(\alpha',\beta',\gamma')}L_1$ and $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L_2 \cap Der_{(\alpha',\beta',\gamma')}L_2$, that is $\forall\, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{C}$,*

$$g(Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L_1 \cap Der_{(\alpha',\beta',\gamma')}L_1 = Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L_2 \cap Der_{(\alpha',\beta',\gamma')}L_2.$$

Let us now classify the possible values of $\alpha, \beta, \gamma, \in \mathbb{C}$ for a linear transformation $d : L \to L$ to be (α, β, γ)-derivation of L.

Proposition. *Let L be a Leibniz algebra over a field $\mathbb{C}$, with char $\neq 0$ and $\alpha, \beta, \gamma, \in \mathbb{C}$, then for $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L$ the values of α, β, γ are given as follows;*

$$\begin{aligned}
Der_{(1,1,1)}L &= DerL;\\
Der_{(1,1,0)}L &= \{d \in EndL | [d(xy)] = [d(x), y]\};\\
Der_{(1,1,-1)}L &= \{d \in EndL | [d(xy)] = [d(x), y] - [x, d(y)]\};\\
Der_{(1,0,0)}L &= \{d \in EndL | [d(xy)] = 0\};\\
Der_{(0,1,1)}L &= \{d \in EndL | [d(x), y] = [x, d(y)]\};\\
Der_{(0,1,-1)}L &= \{d \in EndL | [d(x), y] = [x, d(y)\};\\
Der_{(0,1,0)}L &= \{d \in EndL | [d(x), y] = 0\};\\
Der_{(\delta,1,0)}L &= \{d \in EndL | \delta[d(x,y)] = [d(x), y],\ \forall\ \delta\ \neq 0, 1\}.
\end{aligned}$$

Remark. *For any $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ the dimension of the vector space $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L$ is an isomorphism invariant of Leibniz algebras.*

The possible interpretations of generalized derivations of Leibniz algebras are present in the following proposition.

Proposition. *Let L be a complex Leibniz algebras and $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. The space $Der_{(\alpha,\beta,\gamma)}L$ has the following forms:*

1. $Der_{(1,1,1)}L \subset gl(L)$ is a Lie algebra of derivation;
2. $Der_{(1,1,0)}L \subset EndL$ is a left centroid;
3. $Der_{(1,1,-1)}L \subset EndL$ is a right centroid;
4. $Der_{(1,0,0)}L \subset End(L)$ is a subalgebra of $EndL$;
5. $Der_{(0,1,1)}L \subset gl(L)$ is a Lie algebra;
6. $Der_{(0,1,-1)}L \subset EndL$ is an associative subalgebra of $EndL$;
7. $Der_{(0,1,0)}L \subset EndL$ is an associative subalgebra of $EndL$;
8. $Der_{(\delta,1,0)}L \subset EndL$ is a vector subspace of $EndL$.

References

[1] Leger, G. and Luks, E. (2000) Generalized Derivations of Lie algebras, *J. Algebra*, 228, 165-203.

[2] Hartwig, J., Larsson D. and Silvestrov S. (2006) Deformation of Lie algebras using (σ, τ)-derivation, *Journal of algebra*, 38 (2) 109-138.

[3] Hrivnak, J. (2007) *Invariants of Lie algebras* PhD Thesis, Faculty of Nuclear Science and Physical Engineering, Czech Technical University, Prague.

[4] Novotny, P. and Hrivnak, J. (2008) On (α, β, γ)-derivation of Lie algebras and corresponding invariant functions, *J. Geom. Phys.*, 58, 208-217.

[5] Rakhimov, I. S., Said Husain, Sh. K. and Abdulkadir, A. (2016) *On Generalized derivations of finite dimensional associative algebras*, FEIIC International journal of Engineering and Technology, vol.13, No 2, pp 121-126.

[6] Fiidow, M.A., Rakhimov, I.S., Said Husain, Sh.K., and Basri, W. (2016) (α, β, γ)-Derivations of Diassociative Algebras, *Malaysian Journal Of Mathematical Sciences* 10, 101-126.

[7] Gorbatsevich, V. V. (2013) *On some basic properties of Leibniz algebras*,arXiv preprint arXiv:1302.3345.

[8] Loday, J. L. and Prishvili, T. (1993) Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology, *Mathematiche Annalen.*, 296(1),139-155.

Systems of Convex Inequalities in Functional Spaces

A.V.Arutyunov
Moscow Institute of Physics and Technology, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
arutyunov@cs.msu.ru

Consider the following problem. Let $(E, \|\cdot\|)$ be a Banach space, let $g_i : [0,1]\times E \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1,...,k$, be given functions, let $X \subset E$, be a given set and let I_1 and I_2 be two sets of indexes such that $I_1 \sqcup I_2 = \{1,...,k\}$ (here $\sqcup$ states for the disjoint union). Consider the system

$$\begin{cases} g_i(t,x) \le 0, & i \in I_1, \\ g_i(t,x) < 0, & i \in I_2, \\ x \in X. \end{cases} \tag{1}$$

A solution to this system is a function $x \in L_\infty([0,1], X)$ such that for a.a. $t \in [0,1]$ the following holds:

$$g_i(t,x(t)) \le 0, \quad i \in I_1, \quad g_i(t,x(t)) < 0, \quad i \in I_2, \quad x(t) \in X.$$

In the talk we will discuss solvability conditions for the system (1) under the assumption that all functions g_i are measurable in the variable t and convex and continuous in x. The corresponding result is formulated in the form of a theorem of the alternative analogous to the Gordan's Theorem, Motzkin Theorem, and Ky Fan theorem.

The main difference between the above mentioned theorems and our main result is that the theorem of the alternative for the system (1) is valid under the following regularity assumption: *there exist a function* $\bar{x}(\cdot) \in L_\infty([0,1], X)$, *reals* $R \ge 0$ *and* $\alpha > 0$ *such that*

$$\dot{\forall}\, t \in [0,1] \quad \forall\, x \in X \setminus O(\bar{x}(t), R) \quad \exists\, e = e(t,x) \in (-T_X(x)) \cap S_E :$$

$$\langle x^*, e\rangle \ge \alpha \quad \forall\, x^* \in \partial_x g_i(t,x) \quad \forall\, i \in \mathcal{I}(t,x).$$

Here $O(x,R)$ is an open ball in E centered at x with a radius R, S_E is a unit sphere in E, $T_X(x)$ is the tangent cone to X at x, $\mathcal{I}(t,x)$ is the set of active indexes of the system (1), $\partial_x g$ is the subdifferential of a function g in x. It is proved that the theorem of the alternative holds true under the presented regularity assumption. The examples showing that the regularity assumption is essential are constructed.

The investigation is performed in the Moscow Institute of Physics and Technology.

How do Mathematicians Play Differential Games?

A.A.Azamov
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
abdulla.azamov@gmail.com

After graduating from the famous "Mech-Math" faculty of Moscow State University in 1770 I began my job in the same named faculty of Tashkent State University (TashSU). First year I continued my researches on Stability Theory but in this field I was alone in TashSU that is why I tried to leave to Moscow but in 1971 I was involved by S.H.Sirajdinov for publishing of "Uzbek Soviet Encyclopedia" and had to give up my plan. Because of that I began to attend different seminars in the faculty. After all I turned in the seminar of N.Satimov called "Optimal control and Differential games". N.Satimov was only PhD but his personal features were very attractive for me: simple and open and friendship, very democratic in discussions and accurate in human relations. I recognized that he graduated the same department as me. Besides I was accounted with the game "Lion and Man" solved be elegant elementary way. Thus I decided to study dynamic games. As a PhD project I selected to apply R.Isaacs' heuristic method to the simplest linear game

$$\dot{x} = Ax - u + v,\ u \in P,\ v \in Q \tag{1}$$

when the control sets P, Q are polygons and the terminal set M is a straight. It was opened that Isaacs' barrier may have many number of returning points. The game was solved under the condition of regularity: there should be no more than one turning point. The result was new even in the particular case of time-optimal problem for the shortened system

$$\dot{x} = Ax - u. \tag{2}$$

Further nonregular cases were studied by A.Fazilov and E.Suleymenov. The full solution of the game still is unknown. In 1972 Prof. L.Petrosyan from S.-Peterburgh University, who was one of the beginners of the Theory of Dynamical Games, visited Tashkent and gave talks on one-step games of pursuit and formulated several problems. All of them were solved during his visit: *Satimov N., Azamov A., Petrosyan L.A.* Structure of optimal strategies in simultanions games of pursuit. Control Systems, Institute of Mathematics of Siberian branch of AS of USSSR, 1974, Issue 13, pp. 65-68.

Later the main result was strengthened.

Azamov A. Construction of optimal strategies in an infinite game between two persons. Enginering Cybernetics (1978), No. 1, pp. 22-25.

In 1973 I studied the game (1) when terminal set M is a point and obtained almost necessary and sufficient condition of solvability of pursuit-evasion problem.

I finished my PhD in 1974 and began to study a generalization of the classical game "Lion and Man" of R.Rado and C.Bezicovich. It was considered the case when "Man" moves along arbitrary closed line.

Azamov A. On a problem of escape along a prescribed curve. Jour. of Applied Mathem. And Mechanics, Vol. 46 (1982), No. 4, 553-555 (1983).

Azamov A. On the pursuit of a point that is escaping along a given curve. Dokl. Akad. Nauk UzSSR, 1982, No. 1, pp. 6-7. In the second paper L was supposed a closed line. The case of nonclosed lines was solved later:

Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh. Generalized "Lion and Man" Game of R.Rado. Coll. "Contributions to Game Theory and Management". St. Petersburg University, 2009, Vol. II, pp. 8-20.

It is necessary to notice that "Lion and Man" is one of the simplest differential games but quantitative problem for it stays still unsolved.

In 1976 I started researches on discrete games of Pursuit and Evasion:

$$x_{n+1} = Ax_n - u + v, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

Their theory was began by Ukrainian Mathematicians A.Chikriy but his solution contained a gap. During 1976-80 yy. it was published a circle of papers on the game (3). The results were exposed systematically in the monograph: *Azamov A*. The Foundations of the Theory of Discrete Games. V.I.Romanovskii Institute of Mathematics, 2011, 160 p.

In 1978 I visited Mech-Math of MSU for Qualification Improvement Courses during four months. There I particularly attended the seminar of *L.S.Pontryagin* on Optimal Control and Differential Games. This period I studied the big paper L.S.Pontryagin On the theory of Differential games. Russian Mathematical Surveys (1966), 21(4), pp. 219-274, and managed to find answers for two questions formulated there:

Azamov A. A class of nonlinear differential games. Mathem. Notes, (1981), 30(3-4), pp. 805-808.

Azamov A. Investigation of a class of nonlinear differential games. Differential Equation, (1983), 19(12), pp. 2160-2163.

These results were based on the nonlinear game

$$\dot{x} = a\,(x)\,u + b\,(x)\,v + (c, 0)\,, \qquad x, u, v \in R^2, \quad |u| \le 1, \quad |v| \le 1. \tag{4}$$

Considering (6) allowed to solve Problem 8.1 of R.Isaacs as well:

Azamov A. On Isaacs' pull over game. Vestnik Moscow. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1981, No. 4, 5-7, 84.

At the same period I began to study Pontryagin's alternating integral that was new phenomena in Mathematics:

Pontrjagin L. Linear differential games. I, II. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 174 (1967), 1278-1280; ibid. 175 1967 764-766. The following relation was obtained

$$\mathrm{W}^{\tau}(M) \subset \bigcap_{v(\cdot)} \bigcup_{u_0(\cdot)} \left\{ \mathrm{W}^{\tau-\varepsilon}(M) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} e^{rC} \left[u_0(r) - v(r)\right] dr \right\} \tag{5}$$

valuable from view of point of applications.

In the beginning of 1980's the lower analogue of the alternating integral was defined and applied to pursuit problem. Both integrals have dual properties. It was established self-dual connections between them: $\mathrm{W}^{\tau}(M) = \bigcap\limits_{\sigma>0} \mathrm{W}_{\tau}(M + \sigma S)$ for closed M; $\mathrm{W}_{\tau}(M) = \bigcap\limits_{\sigma>0} \mathrm{W}^{\tau}(M \div \sigma S)$ for open M; $\mathrm{Int}\mathrm{W}^{\tau}(M) = \mathrm{W}_{\tau}(\mathrm{Int}M)$ when $W^{\tau}(M)$ contains a fixed ball for $0 \le t \le \delta$.

Azamov A. Duality of linear differential games of pursuit. Soviet Mathem. Doklady, Vol. 25 (1982), No. 2, 409-412. Detailed recital in

Azamov A. On Pontryagin's second method in linear differential games of pursuit. Mathematics of the USSR-Sbornik, Vol. 46 (1983), No.3, pp. 429-437.

Azamov A. Semistability and duality in theory of the Pontryagin alternating integral. Soviet Mathem. Doklady, (1982), 37(2), 409-412.

Detailed recital of the last paper is given in the next.

Azamov A.A., *Iskanadjiev I.M.* Pontryagin's alternating integral for differential inclusions with counteraction. Coll. "Contributions to Game Theory and Management" , S.-Peterburg University, 2012, Vol. 5, pp. 33-44.

It was natural to attempt to generalize duality theory for nonlinear differential games. In the 1980's I considered nonlinear differential games due to B.Pshenichnii's approach and constructed duality theory for Pshenichnii's operator particularly proved Krasovskii's alternative in classes of ε-strategies:

A.Azamov. On an alternative for pursuit-evasion games in an infinite time interval. J. of Applied Mathem. and Mech., (1986), 50(4), pp. 428-432.

These results were content of the Doctor of Science thesis:

Azamov A.A. Structure of Phase Space of Pursuit-Evasion Games.S.-Peterburg University (1987). (Printed in Mathematical Works of Abdulla A.Azamov. Tashkent, Uzbekistan National University Press, 2017.)

In the end of 1980's I returned to the simple motion games. It was given an explicit formula for Petrosyan's strategy of parallel pursuit: Π-strategy. An elementary introduction to the theory of differential games. National university of Uzbekistan, 2000, 32 p. Then basing on that the solution of qualitative problem for the simple motion game with many pursuers and one evader for all cases besides one very critical situation: Azamov A. On the qualitative problem for simple pursuit game with constraints. Serdica. (Bolgarian Mathematical Notices). 1986, Vol. 12, No. 1, pp. 38-43. (Russian).

What concerns to the critical case the problem stays open as for differential game case so for discrete case. Since 1992 till 2010 I was engaged to governmental positions and wasn't able to lead researches intensively. Here are some results.

Solving of the problem concerning comparing on methods of alternating integral and Satimov's modification of Pontryagin's first method in pursuit games and the problem on necessity of M.S.Nikolslii's "caps" in approximate schemes for the alternating integral:

Azamov A., Yakhshimov Kh.K. The quality problem for a linear differential game with critical properties. Mathem. notes, Vol. 67 (2000), No. 3-4, pp. 413-416.

There were a paper on new approach to the theory of matrix games offered by N.Satimov:

Azamov A. On the metric approach in the theory of matrix games.In the annual coll. "Contributions to game theory and management" . Graduate School of Management, St. Petersburg University, 2010, Vol. III, pp. 22-28.

Search problems are very close to differential games. Some upper estimations and the first lower estimation for an advantage coefficient in search problem on graphs we yielded:

Azamov A. Lower bound for the advantage coefficient in search problem on graphs. Differential Equations, December 2008, Vol. 44, No. 12, pp. 1764-1767. (Russian).

Relations between problems of pursuit and controllability and stability in linear games were established:

Azamov A., Kuchkarov A., Samatov B. The relation between problems of pursuit, controllability and stability in the large in linear systems with different types of constraints. J. of Applied mathem. and Mechanics, Vol. 71, Isuue 2, 2007, pp. 229-233.

Azamov A., Kuchkarov A. On controllability and Pursuit Problems in linear discrete systems. J. of Computer and Systems Sci., 2010, Vol. 49, No. 3, 360-365.

Beginning from 2011 I have been mainly studied Qualitative theory of dynamical systems but continue to interest differential games as a hobby. Namely qualitative problem for the game of pursuit-evasion on graphs were studied:

Azamov A., Kuchkarov A., Holboyev A. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I. Mathem. Automation and Remote Control., 2017. Vol 78, No. 4., pp. 754-761. *Azamov A., Kuchkarov A., Holboyev A.* The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. II. Automation and Remote Control., 2018. Vol 78, No. 4., pp. 345-351.

Besides it was obtained the solution of the quantitative problem for "Lion and Man" in the case of R.Rado (unpublished yet). After almost 50 years of researches I can confirm that to play Differential Games is very attractive, they may find effective applications in the far future moreover even in the present period a lot of applied problems in the form of differential games for example the problem of automatic landing airplanes and robotic control of automobiles but such kind problems can be solved only approximately as in front of them theory is forceless.

Synthesis of Suboptimal Control in the Time-Optimal Problem for the Equation of Heat Conductivity

J.A.Bakhramov
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
bahramov_jasurbek@mail.ru

Consider the equation

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A[u(\cdot,\cdot)](t,x) + v(t,x) \tag{1}$$

with initial and boundary conditions

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(t,s) = w(t,s), \tag{2}$$

where A is a uniformly elliptic differential operator, $t \geq 0$, $x \in D$, D – regular domain with Lyapunov boundary Γ, $s \in \Gamma$, M is a differential operator whose order is less than the order A.

The direct application of the Pontryagin maximum principle to problem (1) and (2) is difficult. Therefore, in [1], the method of expansion in the system of eigenfunctions of the operator A was applied. As a result of this decomposition, the problem reduces to a system

$$\frac{d}{dt} y_k = -\lambda_k y_k + v_k, \qquad y_k(0) = y_{k0}\,, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

In our work, to construct suboptimal control, we use the method of grouping terms of a Fourier series. Unfortunately, its effectiveness is strictly related to the specific type of eigenfunctions $\varphi_k(x)$, therefore, the method is demonstrated here using $A = \frac{d^2}{dx^2}$.

Thus, consider the problem

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(t,x), & |v(t,x)| \leq v_0, \quad t \geq 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,x) = u_0(x), & u(t,0) = 0, & u(t,\pi) = 0. \end{array} \tag{4}$$

Then the eigenvalues are equal $\lambda_k = -k^2$ and the system of eigenfunctions consists of $\varphi_k(x) = \sin kx$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, which will be a complete orthogonal basis of the space $L_2[0,\pi]$.

Consider such a constraint

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |\ u_k \sin kx + v_k \sin 2kx\ | \leq \mu_k, \qquad k \in L, \tag{5}$$

where the sequence μ_k is chosen so that $\sum\limits_{k \in L} \mu_k = v_0$ condition is satisfied. The set (u_k, v_k) satisfying inequality (5) is denoted by P_k. Let $P = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \max\limits_{0 \leq t \leq \pi} |u \sin t + v \sin 2t\,| \leq 1 \right\}$.

Then $P_k = \mu_k P$. As a result, the problem of constructing a suboptimal control is reduced to the time-optimal control problem for a two-dimensional system

$$\dot{x} = -x + u, \ \dot{y} = -4y + v, \ \ (u, v) \in P. \tag{6}$$

First of all, we note that in auxiliary problem (6), for each initial point (x_0, y_0), there is a unique time-optimal control [2]. Therefore, the optimal controls of problem (5) coincide with the extreme controls of the Pontryagin maximum principle [3].

Theorem. *The function*

$$\hat{v}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_k^0(t) \sin kx$$

is a suboptimal control in the problem (4) for the initial state $u_0(x)$.

References

[1] Chernousko F.L. Bounded controls in distributed-parameter systems. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1992. Vol. 56, No. 5. P.810-826.

[2] Ladyzhenskaya O.A. The boundary value problems of mathematical physics. New York: Springer, 1985.

[3] Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. Interscience Publishers, 1962.

An Evasion Problem for the Pontryagin Example

A.A.Hamitov[1], O.B.Doliev[2], M.A.Horilov[3]
[1,2,3]*Namangan State University*

Let **P** and **E** objects with opposite aim be given in the space R^n and their movements based on the following differential equations and initial conditions

$$\mathbf{P}: \ \ddot{x} - a\dot{x} = u\,, \ \ x_1 - kx_0 = 0\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}: \ \ddot{y} - a\dot{y} = v\,, \ \ y_1 - ky_0 = 0\,, \tag{2}$$

where $x, y, u, v \in R^n$, $n \geq 2$, $a \neq 0$ and k is arbitrary; $x(0) = x_0, \ y(0) = y_0$ are the initial locations of the objects respectively at $t = 0$ and it is assumed that $x_0 \neq y_0$; $x_1 = \dot{x}(0), \ y_1 = \dot{y}(0)$ are the initial velocity of the objects correspondingly at $t = 0$; u is the acceleration vector of the pursuer and here the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot) : [0, \infty) \to R^n$. We denote by U_G the set of all measurable functions $u(\cdot)$ satisfying geometric constraint (briefly, G-constraint):

$$|u| \leq \alpha\,, \ \text{for almost every } t \geq 0\,, \tag{3}$$

where α is a positive parametric number which means the maximal acceleration of the pursuer. Similarly, v is the acceleration vector of the evader and here the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot) : [0, \infty) \to R^n$. We denote by V_G the set of all measurable functions $v(\cdot)$ satisfying G-constraint:

$$|v| \leq \beta\,, \text{ for almost every } t \geq 0\,, \tag{4}$$

where β is a positive parametric number which means the maximal acceleration of the evader.

Once the players admissible controls $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ are chosen, the corresponding motions $x(t)$ and $y(t)$ of the players are defined.

The evader **E** struggles to avoid an encounter i.e., to reach the inequality $x(t) \neq y(t)$, for all $t \geq 0$ and the aim of the pursuer **P** is capture the evader **E** i.e., fulfillment of the equality $x(t) = y(t)$ (see [1]-[4]).

Definition. *In the differential game (1)-(4), we call the strategy of the evader the following function:*

$$v^*(t) = -\frac{z_0}{|z_0|}\beta\,, \quad t \geq 0\,, \tag{5}$$

where $z_0 = x_0 - y_0 \neq 0$.

Theorem. *Let* $\delta = \alpha - \beta$ *and one of the following conditions holds*
$a)\delta > 0,\ \ a > 0 \Longrightarrow k > \delta/a\,|z_0|$, $b)\delta = 0,\ \ a < 0 \Longrightarrow k \in [a\,, +\infty)$,
$c)\delta = 0,\ \ a > 0 \Longrightarrow k \geq 0$, $d)\delta < 0,\ \ a < 0 \Longrightarrow k \geq \delta/a\,|z_0|$.
Then in differential game (1)-(4), the evasion problem can be solved.

References

[1] Azamov A.A., Samatov B.T. The П-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management, St. Petersburg, Russia, Collected papers. June 28-30, 2010, pp. 33-47

[2] Chikrii A.A. (1997) Conflict-Controlled Processes. Kluwer, Dordrecht. 1997.

[3] Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2004.

[4] Samatov B.T. On a Pursuit-Evasion Problem under a Linear Change of the Pursuer Resource. Siberian Advances in Mathematics, Allerton Press, Inc.Springer. New York. 23(4), 2013, pp. 294–302.

Pursuit-Evasion Game on the Regular 600 Vertexes Polyhedron in the Space $\mathbb{R}^4$

A.G.Holboyev

Tashkent Pedagogical University, Uzbekistan, Tashkent

Let M_{600} denote the graph of 1-skeleton of the regular polyhedron with 600 vertices in Euclidian space $\mathbb{R}^4$ [1]. The team of Pursuers $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ and one Evader Q moving along M_{600} play a pursuit-evasion differential game.

All points have equal maximal speeds. The process of pursuit-evasion begins from initial positions $\mathbf{P}(0) = \{P_1(0), P_2(0), \ldots, P_n(0)\}$ and $Q(0)$. If one of the players chooses concrete strategy and another chooses arbitrary control function then corresponding trajectories $\mathbf{P}(t) = \{P_1(t),\ P_2(t),\ \ldots,\ P_n(t)\}$ and $Q(t)$ will be defined. The aim of the team of pursuers is to reach the equality $P_i(t) = Q(t)$ for some $i = 1, 2, \ldots, n$ and $t \geq 0$, for any initial positions. The aim of evader is opposite, i.e. to hold the condition $P_i(t) \neq Q(t)$ for all $i = 1,\ 2, \ldots, n$ and $t \geq 0$ for some initial position (see [2]).

Obviously, if n is large enough then the team of Pursuers can win the game. The least value of n that n Pursuers win the game, will be denoted by $N(M_{600})$.

Theorem. $4 \leq N(M_{600}) \leq 6$.

References

[1] Coxeter H.S.M. Introduction to Geometry. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1961.

[2] Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I. Automation and Remote Control. 2017. V. 78. N. 4. pp. 754-761., II. 2018. V. 78. No 10. pp. 345-351.

Linear Evasion Differential Game of One Evader and Several Pursuers with Integral Constraints

G.I.Ibragimov[1], M.Ferrara[2], B.A.Pansera[3]

[1] *Department of Mathematics and Institute for Mathematical Research, Universiti Putra Malaysia, Malaysia*

[2] *University Mediterranea of Reggio Calabria Department of Law, Economics and Human Sciences ICRIOS - The Invernizzi Centre for Research in Innovation, Organization, Strategy and Entrepreneurship Bocconi University - Department of Management and Technology, Italy*

[3] *Department of Law and Economics, University Mediterranea of Reggio Calabria, Italy*

In the present paper we study a linear evasion differential game of many pursuers and one evader. The controls of players are subjected to integral constraints. We construct an explicit evasion strategy.

Let $x_1, \ldots, x_m,\ m \geq 1$, be the points moving in $\mathbb{R}^n$ whose dynamics are described by the equations

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i + v - u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

where $u_1, \ldots, u_m$ are the control parameters of pursuers and v is that of evader, $\lambda_i > 0$, $x_i, x_i^0, u_i, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_i^0 \neq 0$, $i = 1, ..., m$.

Definition. *Measurable functions $u_i(t)$ and $v(t)$, $t \geq 0$, that satisfy the following integral constraints*

$$\int_0^\infty |u_i(t)|^2 dt \leq \rho_i^2, \ i = 1, \ldots m; \quad \int_0^\infty |v(t)|^2 dt \leq \sigma^2. \tag{2}$$

are called controls of the ith pursuer and evader, respectively.

Definition. *A function $(t, x_1, ..., x_m, u_1, ..., u_m) \mapsto V(t, x_1, ..., x_m, u_1, ..., u_m)$, $V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^{2nm} \to \mathbb{R}^n$ is called a strategy of evader if the following system of equations*

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i + V(t, x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_m), \quad x_i(0) = x_i^0, \ i = 1, \ldots, m,$$

has a unique solution $(x_1(t), \ldots, x_m(t))$, $t \geq 0$, for any controls $(u_1(t), \ldots, u_m(t))$, of pursuers and along this solution

$$\int_0^\infty |V(t, x_1(t), \ldots x_m(t), u_1(t), \ldots, u_m(t))|^2 dt \leq \sigma^2.$$

Definition. *If there exists a strategy V of evader such that for any controls of pursuers $x_i(t) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $t \geq 0$, then we say that evasion is possible.*

The problem is to find a condition for evasion to be possible. Thus, the evader knows the values $x_1(t), \ldots, x_m(t)$, $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ of parameters $x_1, \ldots, x_m$, $u_1, \ldots, u_m$ at the current time t. Pursuers apply arbitrary controls $u_1(t), \ldots, u_m(t)$, $t \geq 0$, and try to realize the equation $x_i(t) = 0$ at least for one $i \in \{1, 2, ..., m\}$, whereas the evader tries to maintain the inequalities $x_i(t) \neq 0$ for all $i = 1, ..., m$ and $t \geq 0$.

Theorem. *If $\rho_1^2 + \cdots + \rho_m^2 \leq \sigma^2$, then evasion is possible in game* (1)-(2).

It is sufficient to consider the case when $n = 2$ and $\rho^2 := \rho_1^2 + \cdots + \rho_m^2 < \sigma^2$ (see, for example, ([3], [4]). We have studied a linear evasion differential game of many pursuers and one evader. We have constructed a strategy for the evader and proved possibility of evasion. The evader uses a manoeuvre on a set J_1 and one the set $[0, T] \setminus J_1$ evader uses the control $v(t) = \left(0, \alpha + \left(\sum_{j=1}^m |u_j(t)|^2\right)^{1/2}\right)$. The measure of the set J_1 can be made by choosing parameters a_1 and α as small as we wish. We have also shown that all the approach times τ_i can occur only before a specified time T_0, moreover $\tau_i' \leq T$. The total number of approach times τ_i of all pursuers doesn't exceed the number of pursuers m. For $t \geq T$, the evader uses the control $v(t) = \left(0, \left(\sum_{j=1}^m |u_j(t)|^2\right)^{1/2}\right)$ and there is no longer approach time occurs.

The present research was partially supported by Geran Putra Berimpak - UPM/700-2/1/GPB/2017/9590200 of Universiti Putra Malaysia and the financial support by Decisions_LAB - Dept. of Law, Economics and Human Sciences - University Mediterranea of Reggio Calabria, Italy. This work completed during the stay of the author Ibragimov G.I. at University Mediterranea of Reggio Calabria - Dept Di.Gi.ES - as Visiting Researcher.

References

[1] Chernous'ko F.L. (1976). A Problem of Evasion of Several Pursuers. Prikl. Mat. Mekh., 40(1): 14–24.

[2] Chernous'ko F.L., Zak V.L. (1985). On differential games of evasion from many pursuers. Journal of Optimization Theory and Applications, 46(4): 461–470.

[3] Ibragimov G.I., Salimi M., and Amini M. (2012). Evasion from many pursuers in simple motion differential game with integral constraints. European Journal of Operational Research, 218(2): 505–511.

[4] Gafurjan Ibragimov, Massimiliano Ferrara, Atamurat Kuchkarov, and Bruno Antonio Pansera (2018). Simple motion evasion differential game of many pursuers and evaders with integral constraints. Dynamic Games and Applications. 8: 352–378. https://doi.org/10.1007/s13235-017-0226-6.

The Pursuit Problem with Gronwall Constraint for the Evader

S.N.Inomiddinov[1], N.T.Umaralieva[2], E.T.Umarov[3]
[1,2,3]*Namangan State University*

Consider two players, a pursuer and an evader, moving in the space $\mathbb{R}^n$. The subscripts **P** and **E** will be reserved for the Pursuer and Evader, respectively. Suppose x and y are the locations of the pursuer and the evader respectively. Let objects **P** and **E** with opposite aim be given in the space $\mathbb{R}^n$ and their movements described on the following differential equations:

$$\mathbf{P}: \dot{x} = u\,,\ x(0) = x_0, \qquad \mathbf{E}: \dot{y} = v\,,\ y(0) = y_0,$$

and assume that $x_0 \neq y_0$; where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n, n \geq 2\,$; x_0 and y_0 are the initial states of the players **P** and **E** correspondingly at $t = 0$; u is a control parameter (velocity vector) of the pursuer, v is that of the evader. Control parameter u is selected from the class of measurable functions U_G, satisfying geometric constraint (briefly, G-constraint): $|u(t)| \leq \alpha,$ for almost every $t \geq 0$.

Similarly, v is selected from the class of measurable functions V_{Gr} satisfying Gronwall constraint (briefly, Gr-constraint): $|v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2l\int_0^t |v(s)|^2\,ds$, where $\alpha > 0$, σ, $l > 0$.

The measurable functions $u(\cdot) \in U_G$ and $v(\cdot) \in V_{Gr}$ are called admissible controls of the pursuer **P** and the evader **E** respectively.

Once the players admissible controls $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ are chosen, the corresponding motions $x(t)$ and $y(t)$ of the players.

The object of the pursuer **P** is capture, i.e., to achieve the equality $x(t) = y(t)$ and the evader **E** struggles to avoid an encounter.

Definition. *The function*

$$u(v) = v - \lambda(v)\xi_0$$

is called the strategy of parallel pursuit (the Π*-strategy) of the pursuer* $\boldsymbol{P}$ *in the differential game, where* $\lambda(v, \xi_0) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \alpha^2 - |v|^2}$, $\xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}$ *and* $\langle v, \xi_0 \rangle$ *is the scalar production in space* $\mathbb{R}^n$*.*

Definition. *In the differential game, time* T *is called a guaranteed pursuit time if it is the upper boundary of* t *satisfying* $x(t) = y(t)$*.*

Theorem. *If the conditions* $\alpha > \sigma, \quad l\,|z_0| + \alpha \le \sigma + \alpha \ln \frac{\alpha}{\sigma}$ *hold, then the guaranteed pursuit time exists:*

References

[1] Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math., 20(2). 1919. 293-296.

[2] Isaacs R. Differential Games, J. Wiley, New York-London-Sydney, 1965, 384.

[3] Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy. An Elementary Introduction to the Theory of Differential Games, Taskent, NUUz, 2000, 32.

[4] Samatov B.T. On a Pursuit-Evasion Problem under a Linear Change of the Pursuer Resource.Siberian Advances in Mathematics.Allerton Press, Inc. Springer. New York, 23(4). 2013. 294-302.

Linear Differential Game with Gronwall Constraint

U.A.Mirzamahmudov[1], A.X.Akbarov[2]

[1]*Namangan State University,* [2]*Andijan State University*

Let the motions of the pursuer **P** and the evader **E** be described by the following differential equations, initial conditions and Gronwall constraints (briefly, Gr-constraint)

$$\mathbf{P}: \ \dot{x} - ax = u\,, \ \ x(0) = x_0\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}: \ \dot{y} - ay = v\,, \ \ y(0) = y_0\,, \tag{2}$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, and a is arbitrary; u is the velocity vector of the pursuer and here the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$. We denote by U_{Gr} the set of all measurable functions $u(\cdot)$ satisfying Gronwall constraint (briefly, Gr-constraint):

$$|u(t)|^2 \le \rho^2 + 2l \int_0^t |u(s)|^2 \, ds\,. \tag{3}$$

Similarly, v is the velocity vector of the evader and here the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$. We denote by V_{Gr} the set of all measurable functions $v(\cdot)$ satisfying Gr-constraint:

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2l \int_0^t |v(s)|^2 \, ds, \tag{4}$$

where $l \neq a$; and ρ, σ, l are nonnegative numbers.

By virtue of the equations (1)-(2) each pair of $(x_0,\ u(\cdot))$ and $(y_0,\ v(\cdot))$ generates the trajectories of motion $x(\cdot), y(\cdot)$. The goal of the pursuer **P** is capture the evader **E**, i.e., achievement of the equality $x(t) = y(t)$ and evader **E** strives to avoid an encounter.

Definition. *The following function is called* Π*-strategy of the pursuer [2]-[4]:*

$$u\,(v) = v - \lambda\,(v)\,\xi_0, \tag{5}$$

where $\lambda(v, \xi_0) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + (\rho e^{lt})^2 - |v|^2}$, $\xi_0 = z_0 / |z_0|$, (v, ξ_0) *is the scalar product of the vectors* v *and* ξ_0 *in the space* $\mathbb{R}^n$.

Theorem. *If in the game (1)-(4), one of the following conditions holds*
1. $\rho > \sigma$, $a < 0$; *2.* $\rho > \sigma$, $l < a < l + \frac{\rho - \sigma}{|z_0|}$; *3.* $\rho > \sigma$, $0 < a < l$;
then by virtue of strategy (5) the guaranteed pursuit time will be as follows:

$$T = \frac{1}{l - a} \ln \left(\frac{|z_0|\,(l - a)}{\rho - \sigma} + 1 \right)$$

References

[1] Gronwall T.H Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math., 20(2). 1919. 293-296.

[2] Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2004.

[3] Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management., June 28-30, 2011, St. Peterburg, Russia, Collected papers. Vol. 4. pp. 33-47.

[4] Kuchkarov A.Sh., Ibragimov G.I. An Analogue of the Π-strategy and Pursuit and Evasion Differential Games with many Pursuers on a Surface. Game Theory and Management, St.Petersburg, Graduate School of Management SPbU. St. Peterburg, 2010. Vol. 3. pp. 247-256.

Necessary Optimality Conditions for Problems with Unbounded Differential Inclusion

E.S.Polovinkin
Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia
polovinkin.es@mipt.ru

In the famous work [1], Pontryagin and his colleagues used a very efficient direct variational method in order to prove necessary optimality conditions, which were later called the "Pontryagin maximum principle." This method is based on the linearization of a nonlinear controlled dynamical system near an optimal trajectory. As a result, for the arising linear system of variational differential equations, an adjoint system of differential equations was constructed, and it was proved that under certain boundary conditions the corresponding solution of the adjoint system is a normal vector to the attainability set of the original control system at the points of the optimal trajectory at any instant of time. This was analytically expressed as the Pontryagin maximum principle, transversality conditions, and some other properties of the adjoint system.

The first attempts to develop Pontryagin's direct variational method for optimization problems in the case when the control system is not smooth were made in [2] for a controlled dynamical system represented as a differential inclusion with convex right-hand side. In [3], the present author and Smirnov generalized Pontryagin's direct variational method and obtained necessary optimality conditions in optimization problems with differential inclusion in the case when the right-hand side of the differential inclusion takes compact (possibly, nonconvex) values and satisfies the Lipschitz condition in the Hausdorff metric. In the present report, continuing the studies of [4-9], we generalize Pontryagin's direct variational method to the case of Mayer optimization problems on an interval with a differential inclusion whose multivalued right-hand side takes unbounded nonconvex values, depends measurably on time, and is pseudo-Lipschitz with respect to the state variable, in the presence of state constraints at the initial and terminal points.

Eventually, we prove necessary conditions that also contain the Euler–Lagrange differential inclusion whose graph is a normal cone. However, we use a narrower normal cone than the Clarke normal cone or even a partially convexified limiting normal cone (cf. Theorem 2.2.3 in [11]). In conclusion, we give an example of a problem in which the necessary optimality conditions obtained in the present study are more precise compared with other necessary conditions known in the literature (see, for example, [10, 11, 12]).

References

[1] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko, E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Pergamon, Oxford (1964).

[2] Blagodatskikh, V.I. The maximum principle for differential inclusions. Proc. Steklov Inst. Math., 166, 23–43 (1986).

[3] Polovinkin, E.S., Smirnov, G.V. An Approach to the Differentiation of Many-Valued Mappings, and Necessary Conditions for Optimization of Solutions of Differential Inclusions. Differential Equations, 22, 660–668 (1986).

[4] Polovinkin, E.S. Set-Valued Analysis and Differential Inclusions, Fizmatlit, Moscow (2014).

[5] Polovinkin, E.S. Differential Inclusions with Unbounded Right-Hand Side and Necessary Optimality Conditions // Proc. Steklov Inst. Math., 291, 237–252 (2015).

[6] Polovinkin, E.S. Time Optimum Problems for Unbounded Differential Inclusion // IFAC-Papers On Line, 48, Is. 25, 150–155 (2015).

[7] Polovinkin, E.S. Necessary Optimality Conditions for the Mayer Problem with Unbounded Differential Inclusion // IFAC-Papers On Line, 51, Is. 32, 521–524 (2018).

[8] Polovinkin, E.S. Pontryagin's Direct Method for Optimization Problems with Differential Inclusion // Proc. Steklov Inst. Math., 304, 281–296 (2019).

[9] Polovinkin, E. On Continuous Variations of Trajectories of Differential Inclusion with Unbounded Right-Hand Side // Optimization (2019) (to appear).

[10] Vinter, R.B. Optimal Control. Birkhäuser, Boston (2000).

[11] Clarke, F.H. Necessary Conditions in Dynamic Optimization. AMS, 173, N. 816, Providence (2005).

[12] Mordukhovich, B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation I, II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2006).

Damping of Same Infinite Oscillated Systems

Risman Mat Hasim[1], Gafurjan Ibragimov[2]

[1,2] *Department of Mathematics, Universiti Putra Malaysia, Serdang, Malaysia*

Let $\lambda_1, \lambda_2, ...$ be a sequence of positive numbers, and r be a fixed number. We introduce into the consideration the space

$$l_r^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 < \infty\}$$

with the inner product and norm

$$(\alpha, \beta)_r = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i \beta_i, \quad \alpha, \beta \in l_r^2, \quad ||\alpha|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 \right)^{1/2}.$$

Let $L_2(0,T;l_r^2)$ be the space of the function $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ...)$, $0 \le t \le T$, with measurable coordinates $f_k(t),\ 0 \le t \le T$, satisfying the inequality

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r \int_0^T \mid f_k(t) \mid^2 dt < \infty,$$

where T is a given positive number.

We introduce into the controlled oscillating systems described by the differential equations

$$\ddot{z}_k = -\lambda_k z_k - u_k + v_k, \quad z_k(0) = z_k^0,\ \dot{z}_k(0) = z_k^1,\ k = 1, 2, ..., \tag{1}$$

where $z_k,\ u_k,\ v_k,\ z_k^0,\ z_k^1 \in R^1,\quad z^0 = (z_1^0, z_2^0, ...) \in l_{r+1}^2,\ z^1 = (z_1^1, z_2^1, ...) \in l_r^2,\ ||z^0|| + ||z^1|| \ \neq 0$, $u = (u_1, u_2, ...)$, are control parameters. In paper [3] The author proved that the damping of oscillating systems(1) is possible in finite time.

Now, we consider the controlled oscillating systems described by the differential equations

$$\ddot{z}_{ik} = -\lambda_k z_{ik} - u_{ik} + v_k, \quad z_{ik}(0) = z_{ik}^0,\ \dot{z}_{ik}(0) = z_{ik}^1,\ k = 1, 2, ..., i = 1, ..., m \tag{2}$$

where $z_{ik},\ u_{ik},\ v_k,\ z_{ik}^0,\ z_{ik}^1 \in R^1,\quad z_i^0 = (z_{i1}^0, z_{i2}^0, ...) \in l_{r+1}^2,\ z_i^1 = (z_{i1}^1, z_{i2}^1, ...) \in l_r^2,\ ||z_i^0|| + ||z_i^1|| \ \neq 0$, $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, ...),\ i = 1, 2, ..., m$ are control parameters, $v = (v_1, v_2, ...)$, is an interference. We assume that $u_i(.),\ v(.) \in L_2(0, T;\ l_r^2)$.

Let

$$B(\rho,\ t_0,\ T) = \{f(.) = (f_1(.), f_2(.), ...) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r \int_{t_0}^T \mid f_k(t) \mid^2 dt < \rho^2\},$$

i.e., $B(\rho,\ t_0,\ T)$ is a ball of radius ρ in $L_2(t_0,\ T;\ l_r^2)$.

The following statement is the main result of the paper.

Theorem. *If* $\lambda_0 = \inf_{n\in N} \lambda_n > 0$ *and* $\rho_1^2 + ... + \rho_m^2 > \sigma^2$, *then the damping of the oscillating systems (2) is possible for a finite time.*

References

[1] Isaacs R. Differential Games. John Wiley and Sons, New York, 1965.

[2] Pontryagin L.S. Collected Works. Nauka, Moscow, 1988. 576 p.

[3] Gafurjan Ibragimov. Problem of Relaxation of Oscillation System in Presence of Distribution. Uzbek Math. Journal, Tashkent, 2005. 1, pp. 34-35.

The Strategy of Parallel pursuit in the Nonlinear Differential Games

B.T.Samatov[1], **A.I.Sotvoldiyev**[2]
[1] *Namangan State University*
[2] *Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences*
samatov57@inbox.ru

Consider the differential game [6] described by the equations

$$\dot{x} = u + f(t, x), \quad \dot{y} = v + f(t, y), \quad x(0) = x_0, \; y(0) = y_0, \tag{1}$$

where $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; the function $f : R_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfies Caratheodory's conditions and Lipschitz condition on second argument, x_0, y_0 are the initial positions of the Pursuer $\mathbf{X}$ and Evader $\mathbf{Y}$ respectively.

For the measurable control functions $u(\cdot) : R_+ \to \mathbb{R}^n$, $v(\cdot) : R_+ \to \mathbb{R}^n$ of the X and Y respectively the conditions

$$|u(t)| \leq \alpha, \quad \text{for almost every} \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$|v(t)| \leq \beta, \quad \text{for almost every} \quad t \geq 0, \tag{3}$$

will be subjected, where α and β are a nonnegative parametric numbers.

In this work, we consider the Intercept Problem, when objects move in an external dynamic flow field [6]. We will be based on Pontryagin's formalization [4] and uses method of resolving functions [3] and the proposed method substantiates the parallel approach strategy [1], [2], [3], [5] i.e., the Π-strategy.

Definition. *A strategy $\mathbf{u}\,(t, x(t), y(t), v(\cdot))$ is called winning for $\mathbf{X}$ on the interval $[0, T]$ in the game (1)-(3) if for every $v(\cdot) \in V$ there exists a moment $t^* \in [0, T]$ such that the equality $x(t^*) = y(t^*)$ holds.*

Definition. *If $\alpha \geq |w|$, then the function*

$$\mathbf{u}(t, w) = w - \lambda(t, w)\xi_0, \tag{4}$$

is called the Π-strategy or intercept strategy of pursuer in the game (1)-(3), where $\lambda(t, w) = \langle w, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle w, \xi_0 \rangle^2 + \alpha^2 - |w|^2}$, $\xi_0 = z_0 / |z_0|$, $z_0 = x_0 - y_0$, $w = v + f(t,\, y) - f(t,\, x)$.

Consider particular case of the game (1)

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = u + A(t)x + b(t), & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = v + A(t)y + b(t), & y(0) = y_0, \end{array} \tag{5}$$

where $A(t)$, $t \geq 0$ is an $n \times n$ real matrix function, $b(t)$, $t \geq 0$ is real vector function.

Theorem. *If $|A(t)| \leq k$, $t \geq 0$ and $\alpha > \beta + k\,|z_0|$ then the Π-strategy (4) is winning strategy for the player X on the interval $[0, T]$ in the game (5), where*

$T = \frac{1}{k} \ln \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta-k|z_0|}$ *if* $k \neq 0$, $T = \frac{|z_0|}{\alpha-\beta}$ *if* $k = 0$, $|\cdot|$ *– Euclidian norm.*

References

[1] Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management, June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, Collected papers. Pp. 33-47.

[2] Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Conflict interaction of groups of controlled objects. Izhevsk: Udmurt State University. 2009.

[3] Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes. Kluwer, Dordrecht. 1997.

[4] Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2004.

[5] Petrosjan L.A. Differential games of pursuit. Series on optimization, Vol. 2. World Scientific Publishing, Singapore. 1993.

[6] Sun W., Tsiotras P., Lolla T., Subramani D.N., Lermusiaux P.F.J. Multiple-Pursuit/One-Evader Pursuit-Evasion Game in Dynamical Flow Fields. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. Downloaded by Georgia inst. of technology on April 12, 2017, Pp. 1-11. http://arc.aiaa. org. DOI:10.2514/1.G002125.

The Intercept Problem in Dynamic Flow Field with Different Influences

B.T.Samatov[1], U.B.Soyibboev[2]

[1,2]*Namangan State University*

samatov57@inbox.ru

In this work, the Intercept Problem is studied when objects move in dynamic flow field with different influences. Here we have presented more general conditions for flow field. The main aim is to construct analogies of Π-strategy for pursuer in nonlinear differential games and apply the method of parallel approach [1], [3].

Suppose that in $\mathbb{R}^n$ a controlled object P called the pursuer, chases another object E called the evader. Denote by x the position of the pursuer and by y the position of the evader in $\mathbb{R}^n$. In the present, we consider the Intercept Problem when the objects move in accordance with the equations [4]:

$$P: \ \dot{x} = u + f(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E: \ \dot{y} = v + g(t, y), \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0, y_0 are the initial positions of the Pursuer P and Evader E respectively. For the measurable control functions $u(\cdot) : R_+ \times \mathbb{R}^n$, $v(\cdot) : R_+ \times \mathbb{R}^n$ of the P and E, the conditions

$$|u(t)| \leq \alpha, \quad \text{for almost every} \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \beta, \quad \text{for almost every} \quad t \geq 0 \tag{4}$$

will be subjected correspondingly, where α and β are nonnegative parametric numbers.

In the theory of Differential Games an inequalities of the forms (3) and (4) are usually called *an geometrical constraints for control functions* (briefly G-constraints) and denoted the class of admissible controls pursuer, i.e., of all measurable functions satisfying an G-constraint (3) by U and denoted the class all of the admissible controls evader satisfying G-constraint (4) by V. It is supposed that $f(t,x)$ and $g(t,x)$ satisfy Caratheodory's and Lipschitz's conditions.

Definition. *A strategy $\boldsymbol{u}(t,x(t),y(t),v(t)) : R_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times S_\beta \to S_\alpha$ is called intercepting for P on the interval $[0,T]$ in the game (1)-(4), if for every $v(\cdot)\in V$ there exists a moment $t^*\in[0,T]$ that is to reach the equality $x(t^*)=y(t^*)$, where $x(t)$ and $y(t)$ are trajectories generated during the game and S_ϱ is a ball of a radius ϱ in $\mathbb{R}^n$.*

Definition. *If $\alpha\geq|\omega|$, then the function*

$$u(\omega)=\omega-\lambda(\omega)\xi_0\,,\ \ \lambda(\omega)=\langle\omega\,,\,\xi_0\rangle+\sqrt{\langle\omega\,,\,\xi_0\rangle^2+\alpha^2-|\omega|^2} \tag{5}$$

is called intercepting or Π-strategy of the pursuer in the game (1)-(4), where $\xi_0=z_0/|z_0|$, $\omega=\omega\,(t,x,y,v)=v+g(t,y)-f(t,x)$ and $|u(\omega)|=\alpha,\ \ z_0=x_0-y_0$.

Proposition. *There are a Lebesgue-integrable functions $k(\cdot):R_+\to R_+$ and $h(\cdot):R_+\to R_+$ such that*

$$|f(t,x)-g(t,y)|\leq k(t)\,|x-y|+h(t)$$

for all $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Proposition. *Let*

a) there exists positive root of the equation $\Psi(t)=0$ with respect to t, where $\Psi(t)=|z_0|-\int_0^t\exp\left(-\int_0^s k(\tau)d\tau\right)(\alpha-\beta-h(s))ds$;

b) satisfies the following condition $\alpha>\beta+k(t)\Phi(t)+h(t)$, when $t\in[0,\,T]$, where $T=\min\{\,t:\ \ \Psi(t)=0\}$, $\ \Phi(t)=\Psi(t)\exp\int_0^t k(s)ds$.

Theorem. *Let all propositions and assumption are satisfied. Then the Π-strategy (5) for the player P is intercepting on the interval $[0,\,T]$ in the game (1)-(4), where T is the smallest positive root of the equation $\Psi(t)$.*

References

[1] Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management, June 28-30, 2010, St. Peterburg, Russia, Collected papers. pp. 33-47.

[2] Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Berlin, Heidel.: Spr., 2008.

[3] Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Conflict interaction of groups of controlled objects. Izhevsk: Udmurt State University. 2009.

[4] Sun W., Tsiotras P., Lolla T., Subramani D.N., Lermusiaux P.F.J., Multiple-Pursuit / One-Evader Pursuit-Evasion Game in Dynamical Flow Fields, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Downloaded by Georgia inst. of technology on April 12, 2017.

Solvability of Systems of Convex Inequalities in Banach Spaces

S.E.Zhukovskiy

Moscow Institute of Physics and Technology, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

s-e-zhuk@yandex.ru

Let a linear space L over the field $\mathbb{R}$, a linear operator $A : L \to \mathbb{R}^m$, a vector $b \in \mathbb{R}^m$, functions $f_i : L \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, ..., k$, a convex set $X \subset L$, and two finite sets of indexes I_1 and I_2 such that $I_1 \sqcup I_2 = \{1, ..., k\}$ be given. Consider the system

$$f_i(x) \le 0,\ i \in I_1, \quad f_i(x) < 0,\ i \in I_2, \quad Ax = b, \quad x \in X. \tag{1}$$

Assume that f_i are proper convex functions, $X \subset \operatorname{dom}(f_i)$ for all $i = 1, ..., k$.

We say that the system

$$f_i(x) \le 0,\ i \in I_1, \quad Ax = b, \quad x \in X \tag{2}$$

is strictly solvable if $\exists\ \bar{x} \in X : A\bar{x} = b$ and $f_i(\bar{x}) < 0\ \forall\ i \in I_1$.

Theorem. *Assume that the system (1) is strictly solvable and* $b \in \operatorname{ri}(AX)$. *Then, one and only one of the following assertions is valid.*
(i) There exists a solution $x \in L$ *to the system (1).*
(ii) There exists a nonzero vector $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k, \widetilde{\mu}) \in \mathbb{R}^{k+m}$, *where* $\widetilde{\mu} \in \mathbb{R}^m$, *such that*

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\mu_i + \langle Ax - b, \widetilde{\mu} \rangle \ge 0 \quad \forall x \in X,$$

$\mu_i \ge 0$ *for each* $i \in \{1, ..., k\}$, $\widetilde{\mu} \in \operatorname{span}(AX - b)$, *and* $\mu_i > 0$ *for some* $i \in I_2$.

In the case when the system (1) consists of strict inequalities only, Theorem coincides with the Ky Fan's Theorem (see [1]). There are some other well-known results (see, for instance, [2], §21) analogous to Theorem.

The investigation is performed in the Moscow Institute of Physics and Technology.

Reference

[1] K.Fan, I. Glicksberg, and A.J. Hoffman, Systems of inequalities involving convex functions, Proc. Amer. Math. Soc., 8:617–622, (1957).

[2] R.T.Rockafellar, Convex Analysis, Princeton, New Jersey, Princeton Unibersity Press, (1970).

О модифицированном третьем методе преследования

И.М.Исканаджиев
Ташкентский химико-технологический институт
iskan1960@mail.ru

Пусть $K(\mathbb{R}^d)$(соответственно $C(\mathbb{R}^d)$) – семейство всех непустых компактных (замкнутых) подмножеств $\mathbb{R}^d$, в случае выпуклости множеств пишем co$K(\mathbb{R}^d)$ (соответственно co$C(\mathbb{R}^d)$; $\omega = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ – разбиение отрезка $\Delta = [0,\tau]$($0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n = \tau$, n может зависить от ω); $\int_i$ – означает интегрирование производится по отрезку $\delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i|$. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{z} \in -F(t,v), \qquad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^d$, $v \in Q \in K(\mathbb{R}^d), t \in \Delta = [0,\tau]$, $F : \mathbb{R}^d \times Q \to \mathrm{co}K(\mathbb{R}^d)$ непрерывно. Кроме того, дано множество M, $M \subset C(\mathbb{R}^d)$, называемое терминальным множеством.

Задача преследования в подходе Л.С. Понтрягина ставится следующим образом – Пусть выбран класс стратегий $\mathbb{U}$ преследователя и заданы начальная точка z_0 и положительное число τ. Возможно ли из точки z_0 завершить преследование за время τ в классе стратегий $\mathbb{U}$?

Первыми эффективными методами решения задач такого вида были прямые методы Понтрягина [1]. В [2, 3] предложены модификации первого прямого метода Понтрягина. Пусть $cl\Phi$ обозначает семейство всех измеримых замкнутозначных отображений $A(\cdot) : I \to C(\mathbb{R}^d)$ удовлетворящих условию

$$\int_\Delta A(t)dt \subset M.$$

По каждому $A(\cdot) \in cl\Phi$ построим интеграл

$$W[A(\cdot)] = \int_\Delta \bigcap_{v\in Q} [A(t) + F(t,v)]dt. \qquad (2)$$

В [4,5] предложена дальнейшая модификация первого прямого метода Понтрягина, основанная на рассмотрения объединения интегралов (2) по всем $A(\cdot) \in cl\Phi$. т.е. доказано, что если выполнено включение

$$z_0 \in W_3^\tau = \bigcup_{A(\cdot)\in cl\Phi} W[A(\cdot)],$$

то в игре (1) можно завершить преследования за время τ в классе стробоскопических стратегий. Легко убедится справедливость следующее включение

$W_1^\tau \subset W_3^\tau$ (W_1^τ – интеграл первого метода Понтрягина). Для краткости W_3^τ будем называть третьим интегралом.

В [6] доказано, что верхний и нижний альтернированный интегралы дают необходимое и достаточное условие для завершения преследование в момент времени τ соответственно в верхней и нижней игре в классе специальных стратегий преследователя. В работе [7] показано, что интеграл W_3^τ для линейных дифференциальных игр дает необходимое и достаточное условие завершение преследование в классе стробоскобических стратегий. Здесь последний результат обобщается для игр класса (1).

Пусть $\omega = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n = \tau\}$ – произвольное разбиение отрезка $\Delta = [0, \tau]$. Положим

$$L^i = \bigcap_{v \in Q} \left[\int_i A(t)dt + \int_i F(t, v)dt \right] dt, \tag{3}$$

$$L(\omega) = \Sigma_{i=1}^n L^i, L^\tau(A(\cdot)) = \bigcap_\omega L(\omega). \tag{4}$$

Теорема 1. *Для любого $A(\cdot) \in cl\Phi$ имеет место равенство*

$$W[A(\cdot)] = L^\tau(A(\cdot)) \tag{5}$$

Следствие. Справедливо равенство

$$W_3^\tau = \bigcup_{A(\cdot) \in cl\Phi} L^\tau[A(\cdot)].$$

Теорема 2. *Для того, чтобы в игре (1) существовала стробоскопическая стратегия преследователя, завершающая игру в момент времени τ, необходимо и достаточно $z_0 \in W_3^\tau$.*

Литература

[1] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования. Матем. сб. 1980, Т. 112, №3, С. 307-330.

[2] Сатимов Н. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх. Дифференц. урав., 1973, Т. 9, №11, С. 2000-2009.

[3] Сатимов Н. Об одном методе преследования в линейных дифференциальных играх. ДАН УзССР, 1981, №6, С. 5-7.

[4] Азамов А., Саматов Б. О модифицированном третьем методе в задаче преследования. В кн.: Неклассические задачи математической физики. Т.: ФАН, 1984, С. 174-183.

[5] Никольский М.С. Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования-убегания. Мат. заметки, 1983, Т. 33, вып. 6, С. 885-891.

[6] Азамов А. Качестенная структура фазового пространства дифференциальных игр преследования-убегания, Дис. д.ф.-м.н., ТашГУ, Ташкент, 1986.

[7] Яксубаев К.Д. Необходимость и достаточность третьего интеграла для завершения игры в одном классе позиционных стратегий. ДАН УзССР, 1987, №5, С. 4-5.

Алгоритм решения линейной минимаксной задачи сближения уклонения

А.Р.Маматов

Высшее военное авиационное училище Республики Узбекистан

Задачу о непустоте множества планов задачи линейного программирования можно решить с помощью специальной задачи линейного программирования (задача первой фазы) [1]. Аналогичная задача, возникающая в игровых задачах со связанными переменными, исследована в работе [2]. В данной работе используя результаты [2], предложен алгоритм решения одной линейной игры двух лиц (игроков).

Пусть на фиксированном отрезке времени $T = [0, t^*]$ поведение системы, управляемой двумя игроками, описывается дифференциальным уравнением [3-4]:

$$\dot{x} = Ax + bu + dv, \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))'$ – вектор состояния системы в момент t; $u = u(t)$, $v = v(t)$ – значения управляющих воздействий первого и второго игроков в момент времени t; A – постоянная $n \times n$-матрица; b, d, x_0 – заданные n-векторы; транспонирование матрицы обозначено штрихом.

Функция кусочно-постоянная $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, непрерывная справа, удовлетворяющей неравенствам $f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T$, называется управлением первого игрока. Кусочно-постоянная функция [3, 8] $v(\cdot) = (v(t), t \in T)$ с множеством квантования $\tau = \{t_1, t_2, ..., t_l\}, 0 = t_1 < t_2 < ... < t_l < t_{l+1} = t^*(l \geq m)$, удовлетворяющая неравенствам $g_*(t) \leq v(t) \leq g^*(t), t \in T$, называется управлением второго игрока. Здесь $g_*(t)$, $g^*(t)$, $t \in T$, заданные импульсные функции с множеством квантования τ. Каждой паре (u, v) управлений игроков единственное непрерывное решение $x(\cdot) = (x(t), t \in T)$ уравнения (1) – траектория динамической системы.

Пусть H – заданная постоянная $m \times n$ матрица, g – заданный m вектор. Введем в рассмотрение терминальное множество $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Hx = g\}$.

Рассмотрим следующую задачу. Два игрока, выбирают управление $u(\cdot) = (u(t), t \in T), f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T$, и $v(\cdot) = (v(t), t \in T), g_*(t) \leq v(t) \leq g^*(t), t \in T$ поочередно, сначала первый игрок выбирает $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, затем, зная $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, второй игрок выбирает $v(\cdot) = (v(t), t \in T)$.

Цель первого игрока заключается выбором управление $u^0(\cdot) = (u^0(t), t \in T)$, не допустить попадание траектория системы (1) в момент t^* в множество M, а цель второго игрока – выбором управление $v^0(\cdot) = (v^0(t), t \in T)$, перевести траектории системы (1) из точки x_0 в множество M при t^*.

Задача исследуется сведением к специальной негладкой задаче оптимизации:

$$J(u)=\min_{v}\sum_{i\in I}|h_i^{'}x(t^*)-g_i|\to\max_{u},$$

$$\dot{x}=Ax+bu+dv,\quad x(0)=x_0,$$

$$f_*\le u(t)\le f^*,g_*(t)\le v(t)\le g^*(t),t\in T.$$

где $I=\{1,2,...,m\},h_i^{'}$ – i-ая строка матрицы H; g_i – i-ая компонента вектора g.

Литература

[1] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. М.: Изд-во БГУ, 1981.

[2] Маматов А.Р. Алгоритм решения одной игры двух лиц с передачей информации. ЖВ-МиМФ, 2006, Т. 46, №10, С. 1784-1789.

[3] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.

[4] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

Дифференциальные игры преследования, описываемые уравнениями дробного порядка

М.Ш.Маматов[1], Х.Н.Алимов[2]

[1]*Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека*

[2]*Джизакский государственный педагогический институт*

Пусть движение объекта в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается дифференциальным уравнением дробного порядка вида

$${}_0^C D_t^{\alpha} z=Az+Bu-G\vartheta+f(t) \tag{1}$$

где $z\ge\mathbb{R}^n$, $n\ge 1$, ${}_0^C D_t^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования, $\alpha>0$, $t\in[0,T]$, $A-n\times n$, $B-p\times n$ и $G-q\times n$ постоянные матрицы, u,ϑ – управляющие параметры, u-управляющий параметр преследующего игрока, $u\in P\subset\mathbb{R}^p$, ϑ-управляющий параметр убегающего игрока, $\vartheta\in Q\subset\mathbb{R}^q$, P и Q – компакты, $f(t)$ – известная измеримая вектор-функция. Дробную производную будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто [1]. Напомним, что дробная производная Капуто произвольного нецелевого порядка $\alpha>0$ от функции $z(t)=AC^{[\alpha]+1}(a,b)\,,a,b\in\mathbb{R}^1$, определяется выражением

$${}_0^C D_t^{\alpha} z(t)=\frac{1}{(1-\{\alpha\})}\int\limits_0^t\frac{d^{[\alpha]+1}z(\xi)}{d\xi^{[\alpha]+1}}\frac{d\xi}{(t-\xi)^{\{\alpha\}}}.$$

Кроме того в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M. Цель преследующего игрока вывести z на множество M, убегающий игрок стремится этому помещать.

Терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, M_1 – подмножество подпространства L – ортогонального дополнения M_0 в $\mathbb{R}^n$. π оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L; под операцией понимается операция геометрического вычитания [2]. Для решения этой задачи мы применяем так называемый метод Н.Ю.Сатимова [3].

Пусть $e_\alpha^{At} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{\alpha k}}{((k+1)\alpha}$ матричная α-экспонента [1] и $r > 0$, $\hat{u}(r) = \pi e_\alpha^{rA} BP$, $\hat{\vartheta}(r) = \pi e_\alpha^{rA} GQ$. Обозначим через $\hat{W}(u,r)$ множество $\left[-\frac{1}{\tau}M_1 + \hat{u}(r)\right] \overset{*}{-} \hat{\vartheta}(r)$ определенное при всех $r \geq 0$, $\tau > 0$. Рассмотрим интеграл [3] $W(\tau) = \int\limits_0^\tau \hat{w}(r,\tau)dr$.

Теорема. *Если в игре (1) при некоторой* $\tau = \tau_0$, *выполняется включение*

$$-\pi z_0 - \int\limits_0^\tau \pi e_\alpha^{A(\tau - r)} \left[Az_0 + f(r) \right] dr \in W(\tau)$$

то из начального положения z_0 *можно завершит преследование за время* $T = \tau_0$.

Литература

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

[2] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сборник. Москва. 1980. Т. 112. №3. С. 307-330.

[3] Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. Минск. 1973. Т. 9. №11. С. 2000-2009.

Об инвариантности постоянного многозначного отображения в управляемых колебательных системах

Х.Я.Мустапокулов

Ташкентский государственный технический университет

m_hamdam@mail.ru

Рассмотрим следующее задачи управляемая распределенная система, описываемая гиперболическим уравнением [1]: с внешнего управления

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2} = Az(t,x) + u(t,x), \quad 0 < t \leq T, \ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$z(t,x) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \ x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$z\left(0,x\right)=z^{0}\left(x\right),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=z^{1}\left(x\right),\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

где $z=z\left(t,x\right)$ – неизвестная функция, T – произвольная положительная константа, $z^0(\cdot), z^1(\cdot)$ – начальная функция скорость. Управлениями являются измеримые функции $u\left(\cdot,\cdot\right)\in L_2\left(Q_T\right)$,
где $Q_T=\left\{\left(t,x\right)|t\in\left(0,T\right),x\in\Omega\right\}$, положим $S_T=\left\{\left(t,x\right)|t\in\left(0,T\right),x\in\partial\Omega\right\}$.

В [1] доказано, что при любых $u\left(\cdot,\cdot\right)\in L_2\left(Q_T\right)$ и $z^0(\cdot)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1\left(\Omega\right)$, $z^1(\cdot)\in L_2\left(\Omega\right)$ задача (1)-(3) имеет единственное решение $z=z\left(t,x\right)$ в классе $W_2^2\left(Q_T\right)$, где $W_2^2\left(Q_T\right)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства $L_2\left(Q_T\right)$, имеющих квадратично суммируемые по Q_T обобщенные производные первого и второго порядков из $L_2\left(\Omega\right)$.

Известна, что эллиптический оператор A имеет дискретный спектр, т.е. собственные значения $\lambda_k,\ 0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq...$ и соответствующие собственные функции $\varphi_k\left(x\right),\ x\in\Omega$, составляющие полную ортонормированную систему в $L_2\left(\Omega\right)$ [1-2]. Далее, исследуем слабую и сильную инвариантность постоянного множества [3-5] $D\left(t\right)=\left[0,b\right],\quad 0\leq t\leq T$, где b – положительная константа. Через U обозначим совокупность всех допустимых управлений, которая соответственно определяется положительных числах ρ.

Определение. *Множество $D\left(t\right),0\leq t\leq T$, называется сильно инвариантным относительно системы (1), если для любых $\left\|z^0(\cdot)\right\|\in D\left(0\right),\left\|z^1\left(\cdot\right)\right\|\leq$ и $u\left(\cdot,\cdot\right)\in U$ выполняется включение $\langle z(t,\cdot)\rangle\in D\left(t\right)$, при всех $0\leq t\leq T$, где $\langle\rangle$ – соответствующая норма, $z(\cdot,\cdot)$ – соответствующее решение задачи (1)-(3).*

Определение. *Множество $D\left(t\right),\ 0\leq t\leq T$, называется слабо инвариантным относительно системы (1), если для любых $\left\|z^0(\cdot)\right\|\in D\left(0\right),\left\|z^1\left(\cdot\right)\right\|\leq$ существует управление $u\left(\cdot,\cdot\right)\in U$ такое, что $\langle z(t,\cdot)\rangle\in D\left(t\right)$ при всех $0\leq t\leq T$.*

Наша дальнейшая цель является нахождений связи между параметрами T,b,ρ таким образом, чтобы обеспечить сильную или слабую инвариантность множества $D\left(t\right)$ на отрезке времени $[0,T]$ относительно системы (1).

Литература

[1] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.

[2] Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.

[3] Feuer A., Heymann M. Ω-invariance in control systems with bounded controls // J. Math. Anal. Appl. 1976. 53. C. 266-276.

[4] Фазылов А. З. Достаточные условия оптимальности для задачи выживания // Прикл. мат. мех. 1997. 61, №3. C. 186-188.

[5] Tukhtasinov M., Mustapokulov Kh., Ibragimov G. Invariant Constant Multi-Valued Mapping for the Heat Conductivity Problem. Malaysian Journal of Mathematical Sciences 13(1): 61-74 (2019).

Об условиях оптимальности в минимаксной задаче для дифференциальных включений с параметрами

С.Отакулов, Г.Д.Собирова
Самаркандский государственный университет
otakulov52@mail.ru

Управляемые дифференциальные включения составляют отдельный класс, представляющий интерес в качестве один возможных моделей систем управления в условиях неопределенности (информационные ограничения) [1-4]. Дифференциальные включения с параметрами представляют интерес при исследовании моделей систем управления, учитывающих допустимые изменения структуры системы и (или) множества допустимых управлений. Для таких моделей большое значение имеет вопросы управления ансамблем траекторий системы [5]. Возникающие при этом задачи относятся к классу негладких задач оптимального управления.

Рассмотрим динамическую систему без единственности, для которой указаны класс входных управляющих воздействий $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$, а выходные координаты n-мерного состояния $x = x(t)$, $t \geq t_0$, определяются как траектории дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + b(t, u, q), \quad x(t_0) \in X_0, \quad u \in U(q), \quad q \in Q, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $A(t)$ – $n \times n$-матрица, $b(t, u, q)$ – компакт $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^\nu$. Здесь процесс управления зависит от выбора параметра q, которое может характеризовать степень воздействия внешних сил или возможные изменения в структуре системы управления. Итак, параметр q в системе (1) является важным элементом, причем его идентификация существенно зависит от конкретной цели управления.

Для системы управления (1) будем предполагать: 1) элементы матрицы $A(t)$ суммируемы на T; 2) отображение $(t, u, q) \to b(t, u, q)$ измеримо по $t \in T$ и непрерывно по (u, q), причем существует суммируемая функция $\beta(\cdot)$, такая что $\|b(t, u, q)\| \leq \beta(t)$, $\forall t \in T$, $u \in U(q)$, $q \in Q$. Пусть $U_T(Q)$ – множество всех измеримых ограниченных управлений; $X(t_1, u, q)$ – множество достижимости дифференциального включения (1) в момент времени t_1.

Рассмотрим минимаксную задачу управления для системы (1):

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \min_{y_i \in Y_i} (y_i, P\xi) : \xi \in X(t_1, u, q) \right\} \to \min, \quad u \in U_T(Q), \quad q \in Q \tag{2}$$

где Y_i – компакт из $\mathbb{R}^s$, P – $s \times n$-матрица. Данная задача отличается негладкостью критерия оценки качества управления. Будем изучать необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче (2).

Обычно в задачах управления ансамбля траекторий дифференциальных включений возникают различные негладкие функционалы, оптимизация которых следует от цели управления. Исследование каждой такой задачи следует провести с учетом структуры системы управления и критерия качества.

Пусть $Y = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_\nu$; co$Y$ – выпуклая оболочка множества Y; $\psi(t, y)$ – решение системы $\dot{\psi} = -A'(t)\psi$, $\psi(t_1, y) = P'y$; $C(D, \psi)$ – опорная функция множества D, $\mu(y) = C(X_0, \psi(t_0, y)) + \min\limits_{q \in Q} \int\limits_{t_0}^{t_1} \min\limits_{v \in V} C(b(t, v, q), \psi(t_0, y))dt.$

Теорема. *Для того, чтобы $u^*(t)$, $t \in T$, был оптимальным управлением, q^* – оптимальным значением параметра q в задаче (2) необходимо и достаточно существование $y^* \in coY$, такого, что $\mu(y^*) = \min\limits_{y \in coY} \mu(y)$ и выполнение условий:*

а) $\min\limits_{q \in Q} \int\limits_{t_0}^{t_1} \min\limits_{u \in U(q)} C(b(t, u, q), \psi(t, y^*))dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \min\limits_{u \in U(q^*)} C(b(t, u, q^*), \psi(t, y^*)dt$

б) $C(b(t, u^*(t), q^*), \psi(t, y^*)) = \min\limits_{u \in U(q^*)} C(b(t, u, q^*), \psi(t, y^*))$ *п.в на T.*

Полученные необходимые и достаточные условия оптимальности показывают, что решение бесконечномерной экстремальной задачи (2) можно свести к решению конечномерных экстремальных задач.

Литература

[1] Асеев С.М. Экстремальные задачи для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями. Дифференциальные уравнения. Некоторые математические задачи оптимального управления. Сборник статей. Тр. МИАН, Т. 233, Наука, М.: 2001. С. 5-70.

[2] Асеев С.М. Оптимизация динамики управляемой системы при наличии факторов риска. Труды ИММ УрО РАН. 2017, Т. 23, №1. С. 27-42.

[3] Минченко Л.И., Тараканов А.Н. Методы многозначного анализа в исследовании задач управления дифференциальными включениями с запаздыванием. Доклады БГУИР, 2004, №1. С. 27-37.

[4] Садыгов М.А. Оптимальные задачи для дифференциальных включений с фазовым ограничением. Труды института прикладной математики Бакинского университета. 2013, Т. 2, №1. С. 33-53.

[5] Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Riga, Lambert Academic Publishing, 2019. 144 с.

Достаточные условия оптимальности в негладкой задаче управления для дифференциального включения

С.Отакулов[1], **Т.Т.Хайдаров**[2]
[1] *Самаркандский государственный университет*
[2] *Джизакский политехнический институт*
otakulov52@mail.ru

В математической теории оптимальных процессов важное место занимают задачи управления в условиях неопределенности (неполноты информации), т.е. модели, возникающие в результате учета таких важных факторов, как неточность исходных данных, запаздывание информации, неполнота информации о параметрах внешних сил возмущения, и т.п. [1, 2]. Многие задачи управления в условиях неопределенности могут быть исследованы с применением математического аппарата дифференциальных включений с параметрами. Развиваются исследования задач оптимизации для дифференциальных включений с запаздываниями, дифференциальных включений с нечеткой правой частью и других классов дифференциальных включений и их дискретных аналогов [3-6]. Возникающие при этом задачи относятся к классу негладких задач оптимального управления.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in A(t)x + b(t,u),\ t \geq t_0, \qquad x(t_0) = x^0 \tag{1}$$

где x – n-вектор состояния, u – m-вектор управления, $u \in V$ – выпуклый компакт из $\mathbb{R}^m$, $A(t)$ – $n \times n$-матрица, $b(t,u)$ – непустой компакт из $\mathbb{R}^n$. Предположим, что: 1) элементы матриц $A(t)$ и $A_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, суммируемы на $T = [t_0, t_1]$; 2) отображение $(t,u) \to b(t,u)$ измеримо по $t \in T$ и непрерывно по $u \in V$, причем $\sup\limits_{\gamma \in b(t,u)} \|\gamma\| \leq \beta(t)$, $\forall (t,u) \in T \times V$, $\beta(t)$ – суммируемая на T функция. Пусть $U(T)$ – множество всех измеримых допустимых управлений; $H(u,x^0)$ – множество всех абсолютно непрерывных траекторий системы (1). При заданных условиях множество $H(u,x^0)$ непусто и предкомпактно в $C^n(T)$.

Рассмотрим следующую минимаксную задачу:

$$\sup_{x(\cdot) \in H(u,x^0)} J(x(\cdot)) \to \min,\ u(\cdot) \in U(T) \tag{2}$$

где $J(x(\cdot)) = g(x(t_1))$, $g(\xi) = \max\limits_{i=\overline{1,N}} \min\limits_{z_i \in Z_i} (z_i, \xi)$, z_i, $i = \overline{1,N}$, – замкнутые ограниченные множества из $\mathbb{R}^n$. Будем изучать вопрос построения оптимального управления в данной задаче.

Задачу (2) можно представить так: $\sup\limits_{\xi \in X(t_1,u,x^0)} g(\xi) \to \min,\ u \in U(T)$. Здесь

$X(t,\, u, x^0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \xi = x(t),\ x(\cdot) \in H(u, x^0) \right\},\, t \in T.$

Используя представление выпуклых компактов $X(t, u, x^0),\ t \in T$, с помощью фундаментальной матрицы решений $F(t, \tau)$ уравнения $\dot{x} = A(t)x,\ F(\tau, \tau) = E$ и применяя теорему о минимаксе [1], получим:

$$\sup_{\xi \in X(t_1, u, x^0)} g(\xi) = \max_{i = \overline{1,N}} \min_{z_i \in coZ_i} [(F(t_1, t_0)x^0, z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)b(t, u(t)), z_i)dt], \quad (3)$$

где coZ_i – выпуклая оболочка Z_i, $(Q, \psi) = \sup\limits_{q \in Q} (q, \psi)$ – опорная функция $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема *Для оптимальности управления $u^*(t), t \in T$, достаточно существование номера i^*, $1 \le i^* \le N$, удовлетворяющего условию $\max\limits_{i = \overline{1,N}} \mu_i^* = \mu_{i^*}^*$,*

$$\mu_i^* = \min_{z_i \in coZ_i} [(F(t_1, t_0), z_i) + \int_{t_0}^{t_1} (F(t_1, t)b(t, u^*(t)), z_i)dt], \quad (4)$$

и $z_{i^*}^* \in coZ_{i^*}$ – точки глобального минимума функции

$$\mu(z_i) = (F(t_1, t_0 x^0), z_i) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{v \in V} C(F(t_1, t)b(t, v), z_i)dt \quad (5)$$

а также выполнение для почти всех $t \in T$ условия

$$\min_{v \in V} C(F(t_1, t)b(t, v), z_{i^*}^*) = C(F(t_1, t)b(t, u^*(t)), z_{i^*}^*) \quad (6)$$

Литература

[1] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости М.: Наука, 1977. 392 с.

[2] Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.

[3] Асеев С.М. Экстремальные задачи для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями. Дифференциальные уравнения. Некоторые математические задачи оптимального управления. Сборник статей. Тр. МИАН, Т. 233, М.: Наука, 2001. С. 5-70.

[4] Otakulov S. On the minimization problem of reachable set estimation of control system. IFAC Workshop on Generalized Solution in Control Problems(GSCP-2004). Pereslavl-Zalessky, Russia, September 22-26, 2004. Pp. 212-217.

[5] Plotnikov A.V., Komleva T.A. Piecewise constant controlled linear fuzzy differential inclusions. Universal Journal of Applied Mathematics. 2013, 1(2). Pp. 39-43.

[6] Исраилов И., Отакулов С., Собирова Г.Д. Об условиях оптимальности в негладкой задаче оптимизации для управляемого дискретного включения с параметром. Материа-

лы международной конференции "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация"(DSSCO-2018). Минск, 24-29 сентябрь 2018 г. С. 111-113.

Об одной специальной задаче управления с запаздыванием

С.Очилов[1], Ш.Раджабов[2]
[1] *Самаркандский государственный университет*
[2] *Ташкентский государственный физкультурный университет*

В работе рассматривается задача минимизации времени прохождения области управляемым объектом, описываемом линейной системой с запаздыванием.

В задачах оптимального управления, связанных с экологией, возникает проблема, когда требуется найти траекторию динамической системы, которая за минимальное время находится в зараженной области, причем это область может перемещаться со временем. Если в задаче оптимального быстродействия оставить все условия теми же, а в интегральном функционале подынтегральную функцию заменить функцией

$$f^0(x,\ u) \equiv \delta(x,\ u) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in D \\ 0, \text{если } x \notin D \end{cases} \tag{1}$$

то время нахождения траектории $x(\cdot)$ в заданной, возможно движущейся области, выражается интегралом

$$I \equiv T\left(x(\cdot)\right) = \int\limits_0^1 \delta\left(x(t),\ u(t),\ t\right) dt, \tag{2}$$

где D – заданная зараженная область. Особенность функционала (2), состоит в том, что в нем подынтегральная функция разрывная, что непозволяет прямое использование классических результатов теории оптимальных процессов [1]. Поэтому ее исследование представляет определенной трудности.

В данной работе рассматривается случай, когда заданная область выпукла и не зависит от времени [2]. Предполагается, что области начальных и конечных состояний не пересекается с заданной области. Получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Пусть движение объекта описывается системой $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h)+Bu(t)$, где $x(t)$ – n-мерная вектор-функция состояния, $A,\ A_1,\ B$ – матрицы соответствующих размерностей, $h > 0$, $u(t)$ – m-мерная вектор-функция управления из заданного класса кусочно-непрерывных вектор-функций U при $t \in [0;\ 1]$. Задаются также множество

$$M_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n:\ \varphi_j(x) \leq 0,\ \varphi_j(x) \in C^{(1)},\ j = 1,\ ...,\ s\right\},$$

и многозначное отображение.

$$M(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \varphi_0(x, \ t) \leq 0, \ t \in [0, \ 1]\},$$

где $\varphi_0(x, \ t)$ – выпуклая функция по обоим переменным, а также начальное условие $x(t) = x_0(t), \ t \in [-h, \ 0]$, удовлетворяющие условиям $M_1 \cap M(1) = \varnothing, \ x(0) \notin M(0)$.

Требуется выбрать управление $u \in U$ так, чтобы $x(1) \in M_1$, а время, в течение которого выполнено включение $x(t) \in M(t)$, было минимальным.

Литература

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрилидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, изд. 3-е, 1976. 392 с.

[2] Пшеничный Б.Н. Выпуклой анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

О задаче убегания в одной двумерной дифференциальной игре

Н.М.Умрзаков, Б.Комилжонов

Андижанский государственный университет

umrzaqov2010@mail.ru

Рассмотрим квазилинейную дифференциальную игру убегания

$$\dot{z} = Cz - f(u, v) + a \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^2, \quad C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, u-параметр преследующего, v-параметр убегающего, $u \in U, \quad v \in V, \quad U$ и V непустые компактные множества, $f : U \times V \to \mathbb{R}^2$ – непрерывная функция, $a \in \mathbb{R}^2$ – заданный вектор. Терминальное множества M – начало координат плоскости $\mathbb{R}^2$.

В настоящей работе, примыкающей к исследованиям [1,2], продолжено изучение задачи уклонения от встречи (с точкой 0) для двумерных игр. В ней получено более общее достаточное, гарантируются возможность уклонения из всех начальных точек, отличных от 0. В конце работы рассмотрены примеры, иллюстрирующие наш основной результат.

При конструировании значения $v(t)$ параметра $v \in V$ в каждый момент времени $t \geq 0$ используются значения $u(t)$ и $z(t)$ параметра $u \in U$ и фазового вектора z в тот же момент времени t. Через $\phi(t) = (\phi_1(t), \ \phi_2(t))$ обозначим траекторию системы

$$\dot{z} = Cz + a \tag{2}$$

проходящую при $t = 0$ через точку 0: $\phi(0) = (\phi_1(0), \ \phi_2(0))$

Пусть

$$\Pi = \{(\phi_1(t), \ \phi_2(t)) : \ -\infty < t \leq 0\} \tag{3}$$

Если $a = 0$, т.е. $a_1^2 + a_2^2 = 0$, то $\Pi = \{0\}$.

Предположим $a_1 \neq 0$. Тогда в силу (2) $\phi_1 = a_1 \neq 0$. Значит, уравнение $z_1 = \phi_1(t)$ однозначно разрешимо относительно $t: \quad t = f(z_1), \quad |z_1| \leq \delta, \quad \delta > 0$, причем $f(z_1)$аналитическая функция. Далее, имеем $z_2 = \phi_2(t) = \phi_2(f(z_1)) = g(z_1)$. Ясно, что уравнение

$$z_2 = g(z_1), \ -\delta \leq z_1 \leq 0 \tag{4}$$

описывает часть линии Π, примыкающую к точке 0. Очевидно, существует число $t_1 < 0$ такое, что $z_1(t_1) = -\delta$.

Теорема. *Если выполнены условия:*

a) $0 \in \bigcap\limits_{u \in U} f(u, V)$;

b) *для любого* $\delta_0, \quad t_1 \leq \delta_0 < 0$ *существует такое* $T, \quad \delta_0 < T \leq 0$, *что*

$$N = \min_{u \in U} \max_{v \in V} \left| g'(z_1(T)) f_1(u, v) - f_2(u, v) \right| > 0, \tag{5}$$

то в игре (1) возможно убегание.

Литература

[1] Крамаровский В.Б. Об одном классе квазилинейных дифференциальных игр. Т.: УзМЖ, 1992. №3-4. С. 65-71.

[2] Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Т.: изд-во ФАН, 2000, 176 с.

О локально-инерционных управлениях в линейных дифференциальных играх убегания

Л.П.Югай

Алмалыкский филиал НИТУ МИСиС, Узбекистан

Рассматривается линейная дифференциальная игра убегания [1]

$$\dot{z} = Cz - u + v + a, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, C – $(n \times n)$-матрица, $u \in P$, $v \in Q$, P и Q – непустые компакты из $\mathbb{R}^n$, терминальное множество M – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор. Управлениями игроков(преследователя и убегающего) являются измеримые функции $u = u(t) \in P$ и $v = v(t) \in Q$ соответственно.

Н.Сатимов в работе [2] ввел два новых класса управлений преследующего игрока D и $D(r, \Delta)$, которые были названы классами инерционности управлений, а сами управления – инерционными:

D – множество равностепенно непрерывных функций $u = u(t) \in P$, $t \in [0, +\infty)$.

$D(r, \Delta)$ – множество функций $u = u(t) \in P$, определенных и измеримых на $[0, +\infty)$ таких, что, для любой функции из этого множества выполняется условие:

$$|u(t_1) - u(t_2)| \le r \ \text{ при всех } \ t_1, t_2 \in [0, +\infty), \quad |t_1 - t_2| \le \Delta,$$

где r и Δ – константы.

В [2] Н.Сатимовым были доказаны теоремы об убегании для линейных дифференциальных игр (1), когда преследователь применял инерционные управления из классов D или $D(r,\Delta)$. В этом случае частично разрешалась известная в теории убегания μ-проблема Л.С.Понтрягина [1].

Несколько ранее, в тех же целях, идея сужения класса управлений для преследователя была реализована М.С.Никольским в [3] при исследовании обобщенного контрольного примера Л.С.Понтрягина.

В целях равноприменяемости управлений игроками нами предложены следующие классы управлений преследующего и убегающего игроков:

$L_P(t_0,\Delta)$ – класс измеримых управлений преследователя $u = (t) \in P$, $t \ge t_0$, таких, что на каждом отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$ выполняются условия:

A) $u(t_i) = u_i \in P$;

B) $|u(t) - u(t_i)| \le \gamma |t - t_i|^{\alpha}, t \in [t_i, t_{i+1})$, где $i = 1, 2, \ldots, p, p \in N$, $t_i \in T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_p = t_0 + \Delta\}$, T – произвольное разбиение отрезка $[t_0, t_0+\Delta], \gamma \ge 0, \alpha > 0, \ \Delta > 0$ – константы.

Аналогично вводится класс управлений $L_Q(t_0,\Delta)$ убегающего игрока.

$D_c(P)$ $(D_c(Q))$ – класс (множество) кусочно-постоянных функций со значениями из $P(Q)$, и таких, что каждая функция имеет на произвольном отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$, $t_0 \ge 0$, $\Delta > 0$, конечное число точек разрыва первого рода, в которых непрерывна справа.

Классы $D_c(P)$, $D_c(Q)$, $L_P(t_0,\Delta)$ и $L_Q(t_0,\Delta)$ будем называть, следуя [2], классами локально-инерционных управлений.

Для локально-инерционных управлений игроков $D_c(P)$ и $D_c(Q)$ теорема о возможности убегания доказана в [4].

Если обоим игрокам (преследователю и убегающему) предписать использовать локально-инерционные управления из классов $L_P(t_0,\Delta)$ и $L_Q(t_0,\Delta)$ соответственно, то для для линейной дифференциальной игры (1) справедлива теорема об убегании.

Литература

[1] Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача убегания одного управляемого объекта от другого. ДАН СССР, 1969, Т. 189, №4, С. 721-723.

[2] Сатимов Н. К теории дифференциальных игр убегания. Матем. сборник, 1977, Т. 103(145), №3, С. 430-444.

[3] Никольский М.С. Об одном критическом случае в задаче уклонения от встречи. Кн. Проблемы аналит. мех., теор. устойч. и управления. М.: Наука, 1975, С. 230-234.

[4] Yugay L.P. Linear differential evasion game without superiority. J. Annals of Differential Equation (China), 1992, No 2, pp. 158-163.

$G_2^{(2)}$-Periodic Ground States for the SOS Model with a Periodic External Field on the Cayley Tree

M.Abdusalomova[1], **M.Raxmatullayev**[2], **M.Rasulova**[3]
[1,2]*Namangan State University*
[3]*The Ministry of International Affairs Namangan academic lyceum*
mrahmatullaev@rambler.ru

Let $\tau^k = (V, L)$ be a Cayley tree of order k, i.e, an infinite tree such that exactly $k+1$ edges are incident to each vertex. Here V is the set vertices and L is the set of edges of τ^k.

Let G_k denote the free product of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$ of order 2 with generators $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, i.e., let $a_i^2 = e$ (see [3]).

There exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order k and the group G_k (see [1], [2]).

Assume that spin takes its values in the set $\Phi = \{0, 1, 2\}$. By a configuration σ on V we mean a function taking $\sigma : x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations coincides with the set $\Omega = \Phi^V$.

Consider the quotient group $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$, where G_k^* is a normal subgroup of index r with $r \geq 1$.

Definition. *A configuration $\sigma(x)$ is said to be G_k^* – periodic, if $\sigma(x) = \sigma_i$ for all $x \in G_k$ with $x \in H_i$. A G_k – periodic configuration is said to be translation invariant.*

Let M be the set of all unit balls with vertices in V. By the restricted configuration σ_b we mean the restriction of a configuration σ to a ball $b \in M$. Let c_b denote the center of a unit ball b.

SOS model with $G_k^{(2)}$ – periodic external field is defined according to the following Hamiltonian:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| + \sum_{x \in V} \alpha_x \sigma(x), \tag{1}$$

where $J, \alpha_x \in R$ and

$$\alpha_x = \begin{cases} \alpha_1, & \text{if } x \in G_k^{(2)} \\ \alpha_2, & \text{if } x \in G \backslash G_k^{(2)} \end{cases}, \text{ where } \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ and } G_k^{(2)} = \{x \in G_k : \ |x| \text{ is even}\}.$$

The energy of a configuration σ_b on b is defined by the formula:

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2}J\sum_{x:\langle x,c_b\rangle\in L}|\sigma(x)-\sigma(c_b)| + \alpha_{c_b}\sigma(c_b). \qquad (2)$$

Definition. *A configuration φ is called a ground state of the Hamiltonian (1), if $U(\varphi_b) = \min\{U_1(\sigma_b),\ U_2(\sigma_b),\ U_3(\sigma_b),\ \ldots,\ U_{29}(\sigma_b)\}$ for all $b \in M$.*

For a fixed $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 29$, we set

$$A_m = \left\{(J,\ \alpha_1,\ \alpha_2) \in R^3 : U_m = \min\{U_1(\sigma_b),\ U_2(\sigma_b),\ U_3(\sigma_b),\ \ldots,\ U_{29}(\sigma_b)\}\right\}.$$

It is studied the case $k = 2$.

References

[1] U.A.Rozikov, Gibbs measures on Cayley trees.World scientific. (2013).

[2] N.N.Ganikhodzhaev, Group representation and automorphisms of the Cayley tree, Dokl. Akad. nauk Resp. Uzbekistan, No. 4, 3. (1994).

[3] M.I.Kargapolov and Yu.I.Merzlyakov, Fundamentals of the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin. (1979).

On the Problem of Construction of a Poincaré Map for Multi-Dimensional Dynamical Systems

O.S.Akhmedov[1], A.X.Abdullayev[2]
[1]*Uzbekistan Academy of Science, Institute of Mathematics*
[2]*Andijan State University*
odiljon.axmedov@gmail.com

Consider a Cauchy problem

$$\dot{z} = f(z), z(0) = z_0, \qquad (1)$$

where $z \in \mathbb{R}^d$. Let by one-step numerical method

$$z_{n+1} = z_n + F(z_n, h) \qquad (2)$$

a priori it is found that system (1) has a supposedly closed trajectory passing through a neighborhood of the point z_0, $z_n \approx z(nh)$ is the approximate value of the solution $z(t)$ of system (1) at time $t = nh$, h – step of integrating.

In real calculations, due to rounding of the results of arithmetic operations on a computer, instead of the sequence z_n one obtains another sequence of vectors ζ_n.

These sequences satisfy a scheme similar to scheme (2) with another rounded function $\widetilde{F}$, that is,

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \widetilde{F}(\zeta_n, h)$$

An approach is widely spread in the literature that, based on the behavior of the sequence z_n and even ζ_n, it is concluded that there exists a closed trajectory. Of course, without proper justification, such kind of conclusions may not be true.

Let a hyperplane passes through the point z_0 that is transverse (or conveniently perpendicular) to the vector $f(z_0)$. In this hyperplane, we introduce the coordinate system and take the specific set D as the domain of the Poincaré map $P : D \to \mathbb{R}^d$. If it turns out

$$P(D) \subset D \tag{3}$$

then from the Brouwer's theorem [2] it follows that the Poincaré map has a fixed point ie $\exists z^* \in D, P(z^*) = z^*$. This is in the language of dynamical systems, means the existence of a closed trajectory of system (1). For $d = 2$ in many cases, the relation (3) can be established relatively simply than the case of $d \geq 3$.

In the talk, according to the differences $z(t) - z(nh)$, $z(nh) - z_n$ and $z_n - \zeta_n$, the algorithm for constructing the Poincaré map will be demonstrated for the three and four-dimensional brusselator models using the DN-tracking method [3].

Reference

[1] Andronov A.A., Leontovich E.A., Gorden I.I., Maier A.G. Qualitative theory of second-order dynamical systems, Wiley, New York, 1973.

[2] DN-tracking method for proving the existence of limit cycles. In: Abstracts of Papers of the International Conference on Differential Equations and Topology dedicated to L.S.Pontryagin on the occasion of his 100th birthday, Moscow (2008), pp. 87-88.

On Absolutely Continuous Solutions of Pfaff Equations

A.O.Begaliyev

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

One of the classical types of differential equations is

$$\omega = a_0\left(X\right)dX_0 + a_1\left(X\right)dX_1 + \ldots + a_n\left(X\right)dX_n = 0, \tag{1}$$

called a Pfaff equation (where $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in D,\ D \subset \mathbb{R}^{n+1}\big)$.

Equation (1) defines a field of hyperplanes that is not always integrable, i.e. there may not exist a hypersurface tangent in each its point to the hyperplane of the field (1) [1]. If coefficients $a_i\left(X\right),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$ are continuously differentiable in D then necessary and sufficient condition of integrability of (1) will be given by Frobenius criterion [1]-[4]:

$$\omega \wedge d\omega = 0. \tag{2}$$

Under the condition (2) there is a single integral surface passing through each point X^0, $X^0 \in D$, if the last not singular i.e. $a_i\left(X^0\right) \neq 0$ at least for one

$i = 0, 1, 2, \ldots, n$. We emphasize that the Frobenius's criterion is a condition of integrability in a whole, i.e. concerns all points of the domain D.

For definiteness assume $a_0(X) \neq 0$ in some neighbourhood of a point X^0, that will be denote by D again. Then the equation (1) becomes equivalent to the system

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i(x, u) \tag{3}$$

where $u = X_0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j = X_j$, $f_j(x, u) = -a_j(X)/a_0(X)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, $X^0 = (x_0, u_0)$.

It is obvious that the formulation of Frobenius integrability condition in the form (2) is meaningless without an assumption of differentiability of functions f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Therefore, first of all we should reformulate the criterion of integrability in the convenient form.

Consider a Cauchy problem for the system (3). Suppose f_i are defined in the domain D, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ and $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, u^0\right) \in D$. Our aim is to find a solution $u(x)$ from the class C^1, satisfying the system (3) and the condition $u|_{x_i = x_i^0} = u_i^0$.

Theorem. *Let f_i are continuous functions in the domain D. Then the following propositions are equivalent:*
a) the Cauchy problem for the system (3) is solvable for any $\left(x_i^0, u^0\right) \in D$;
b) for any $\left(x_i^0, u^0\right) \in D$ integral equations

$$u\left([x]_k\right) = u\left([x]_{k-1}\right) + \int\limits_{x_k^0}^{x_k} f_k\left\{[x]_k^s, u\left([x]_k^s\right)\right\} ds \tag{4}$$

have coinciding solutions, where $[x]_k = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$, $[x]_k^s = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, s, x_{k+1}, \ldots, x_n\right)$, $[x]_n = x$, $k, s = 1, 2, \ldots, n$.

Corollary. *If the functions f_i are continuously differentiable, then the Frobenius's condition is equivalent with the statement a) and b) of Theorem.*

Reference

[1] Arnold V.I. Additional chapters of the Theory of Ordinary Differential Equations. Moscow. 1978, 304 p.

[2] Hartman Ph. Ordinary differential equations.John Willey and Sons, New York, 1964, 720 p.

[3] Hakopian H.A., Tonoyan M.G. Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems. New York J. Math. 10, 2004, pp. 89-116.

[4] Mardare S. On Pfaff systems with L^p coefficients in dimension two. C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I 340 (2005) pp. 879-884.

On the Dynamical System of an Evolution Operator

Z.S.Boxonov

Namangan State University

z.b.x.k@mail.ru

Consider the following set

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} |\, x_i \geq 0, y_i \geq 0, \sum_i x_i \neq 0, \sum_i y_i \neq 0,\ \sum (x_i + y_i) = 1 \right\}.$$

We call the partition into types hereditary if for each possible state $z \in S$ describing the current generation, the state $z' \in S$ is uniquely defined describing the next generation. This means that the association $z \to z'$ defines a map $W : S \to S$ called the evolution operator[1].

For any point $z^{(0)} \in S$ the sequence $z^{(t)} \in W\left(z^{(t-1)}\right), t = 1, 2, \dots$ is called the trajectory of $z^{(0)}$.

If $z' = ({x'}_1, \dots, {x'}_n, {y'}_1, \dots, {y'}_n)$ is a state of the system gens in the next generation then by the rule [2] we get the evolution operator $W : S \to S$ defined by

$$W : \begin{cases} {x'}_k = \frac{a \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \theta_{ipk} x_i y_p}{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{p=1}^n y_p}, \\ {y'}_k = \frac{(1-a) \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \theta_{ipk} x_i y_p}{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{p=1}^n y_p} \end{cases} \tag{1}$$

where $k = 1, \dots, n$.

Our goal is to study dynamical systems generated by operator (1).

For $a \in (0,1)$ we denote

$$S_a = \left\{ z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in S\ :\ \sum_{i=1}^n x_i = a,\ \ \sum_{j=1}^n y_j = 1 - a \right\}.$$

The restriction on S_a of the operator W, denoted simply by W_a, has the form

$$W_a : \begin{cases} {x'}_k = (1-a)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \theta_{ipk} x_i y_p, \\ {y'}_k = a^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \theta_{ipk} x_i y_p \end{cases} \tag{2}$$

where $k = 1, \dots, n$.

Denote $\beta = \frac{1-a}{a}$. A point $z \in S_a$ is called a fixed point of W_a if $W_a(z) = z$.

We consider the special case of the operator W_a:

$$U:\begin{cases} x'_k = a^{-1}x_i x_p, \ \ k=1,\dots,n, k\neq l \\ x'_l = a^{-1}\left(x_l x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{p\neq} x_i x_p\right) \end{cases} \tag{3}$$

Theorem 1. *1) If $j=l$ then the operator (3) has unique fixed point $x = (0,\dots,0,a,0,\dots,0)$;*

2) If $j\neq l$ then (4) has fixed points

$$x_{1,l} = \left(\underbrace{0,\dots,0,a,}_{l}\ \underbrace{0,\dots 0}_{n-l}\right), \quad x_{2,j} = \left(\underbrace{0,\dots,0,a}_{j},\underbrace{0,\dots 0}_{n-j}\right).$$

Theorem 2. *Let $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$ be an initial point.*

1) If $j=l$ then $\lim\limits_{m\to\infty} U^m\left(x^{(0)}\right) = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \left(\underbrace{0,\dots,0,a}_{j},\underbrace{0,\dots 0}_{n-j}\right).$

2) If $j\neq l$ then $\lim\limits_{m\to\infty} U^m\left(x^{(0)}\right) = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \begin{cases} x_{1,l}, & if\ x_j^{(0)}\neq a \\ x_{2,j}, & if\ x_j^{(0)} = a \end{cases}$

Reference

[1] Lyubich Y.I. Mathematical structures in population genetics, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[2] Varro R. Gonosomal algebra, Journal of algebra, 447, 2016,1-30.

Circle Dynamics and Symbolic Dynamics

A.Dzhalilov[1], A.Jalilov[2]

[1] *Turin Polytechnic university in Tashkent*

[2] *Department of Mathematics, Ajou University, Suwon, South Korea*

adzhalilov21@gmail.com

Many problems of ergodic theory, statistical mechanics, information theory, biology and medicine reduced to investigate infinite sequences spaces (see for instance [1], [2]).

In present paper we study infinite binary sequences associated by irrational rotation on the circle. The simplest of such kind sequences is called Sturmian sequences and at this time very well studied (see for instance [3]).

Let $f_\theta(x) = x+\theta$ mod1 $x\in S^1 = R^1/Z^1 \cong [0,1)$ be a linear rotation with irrational $\theta\in[0,1)$. Fix a number $b\in[0,1)$. Consider the partition $P_0(\theta,b) :=$

$\{[0,b),[b,1)\}$ of the circle. Define the coding function $\nu_{\theta,b}: S^1 \to \{0,1\}$:

$$\nu_{\theta,b}(x) := \begin{cases} 1, \text{ if } x \in [0,b), \\ 0, \text{ if } x \in [b,1). \end{cases} \tag{1}$$

Consecutively,

$$\nu_{\theta,b}(f_\theta^i(x)) := \begin{cases} 1, \text{ if } x \in f_\theta^{-i}([0,b)), \\ 0, \text{ if } x \in f_\theta^{-i}([b,1)). \end{cases} \tag{2}$$

Take any $x \in S^1$. The corresponding infinite sequence $\underline{\omega} := \underline{\omega}(x)$ of zeros and ones we define as

$$\underline{\omega} = (\omega_0\omega_1...\omega_n...) := (\nu_b(x)\,\nu_b(f_\theta(x))...\nu_b(f_\theta^n(x))...)$$

Denote the collection of such admissible infinite words $\Omega_\omega(\theta,b)$ i.e.

$$\Omega_\omega(\theta,b) = \{\underline{\omega}(x),\ x \in S^1\}.$$

The complexity function of infinite word $\underline{\omega}$ assigns to each positive integer n the number $p_{\underline{\omega}}(n)$ of distinct subwords of length n of $\underline{\omega}$. An infinite word $\underline{\omega}$ is Sturmian if for all $n \geq 1$, $p_{\underline{\omega}}(n) = n+1$. In the case, $b = 1-\theta$ the word $\underline{\omega}(x)$ is Sturmian for any $x \in S^1$ and moreover admits many interesting properties (see [1], [4]). The present paper in some sense continues and completes the above works.

We study the complexity functions for all $b \in [0,1)$.

Denote $r(n)$ the number of right special factors of length n and

$$k_0 = min_{n\geq 1}(n, r(n) = 2).$$

Theorem. *Let f_θ be the linear rotation to the irrational angle θ and the points 0 and b lies not on the same orbit. Suppose $n \geq k_0$.*
Then the followings are hold
1. If $0 < \theta < b$, then $p(n) = 2n$ for all $n \geq 1$
2. If $0 < b < \theta$, then

$$p(n) := \begin{cases} n+1 \ \mathit{if}\ n < k, \\ 2n-k \ \mathit{if}\ n \geq k. \end{cases} \tag{3}$$

References

[1] Z. Coelho, A. Lopes and L. da Rocha, Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval exchange maps, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (11), (1995) 3533–3542.

[2] H.Akhadkulov, A.Dzhalilov and D.Mayer, On conjugations of circle homeomorphisms with two break points, Ergodic Theory Dynamic. Sys. 34 (3), (2014) 725–741, DOI: 10.1017/etds.2012.

[3] Idrissa Kabore, Study of an Extension of Sturmian Words over a Binary Alphabet. International Mathematical Forum, Vol. 7, 2012, no. 44, 2167–2177.

[4] Cassaigne, J., Nicolas, F. Factors complexity, Combinatorics, Automata and Number Theory, V.Berth, M.Rigo (Eds), Encyclopedia of Mathematics and its Applications 135, Cambridge University Press (2010).

Some Patterns of Self-Invertible Matrix and Their Effect on Cipher Hexagraphic Polyfunction

Faridah Yunos[1,2] **and Sally Lin Pei Ching**[3]

[1]*Department of Mathematics, Faculty of Science, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia*

[2]*Institute for Mathematical Research, Universiti Putra Malaysia, 43400 Serdang, Selangor, Malaysia*

[3]*Boon Siew Honda Sdn. Bhd. (676896-A) 721, Persiaran Cassia Selatan 1, Kawasan Perindustrian Batu Kawan, 14100, Simpang Ampat, Penang, Malaysia*

Cryptography is defined as the science or study of the techniques of secret writing. It is the art or science encompassing the principles and methods of transforming an intelligible message (plain text) into one that is unintelligible (cipher text) and then transforming that message back to its original form [1]. Cryptography is considered to be a branch of both mathematics and computer science. They are affiliated closely with information theory, computer security, and engineering.

Hill Ciphers are an application of linear algebra to cryptology (the science of making and breaking codes and ciphers). It was introduced by Lester S. Hill [8]. The core of Hill cipher is matrix manipulations. For encryption, algorithm takes m successive plain text letters and instead of that substitutes m cipher letters. In the Hill cipher, each character is assigned to a numerical value like $a = 0, b = 1, \ldots, z = 25$. The substitution of cipher text letters in the place of plain text letters leads to m linear equation and simply can be written as $C \equiv KP \ mod \ 26$, where C and P are column vectors of length m, representing the plain text and cipher text, respectively, and K is an $m \times m$ matrix, which is the encryption key. The inverse of a matrix K is needed in the process of decryption. It satisfies condition $KK^{-1} \equiv K^{-1}K \equiv I \ mod \ 26$, where I is an identity matrix. The encryption process is $C = E_k(P) = K_p$. Whereas, the decryption is $P = D_k(C) = K^{-1}C = K^{-1}K_p = P$.

Many researchers developed different methods to improve the quality of Hill Cipher. Some applications of Number Theory to Cryptography was investigated by [2]. Based on the modulo arithmetic concept, she developed a number of encryption methods by employing the Cipher Digraphic [9], RSA [10] and LUC [11] systems. The system called Cipher Digraphic Polyfunction in the form of $C^{(t)}_{2\times j} \equiv A^t_{2\times 2} P_{2\times j} \ mod \ N$ with $(|A_{2\times 2}|, N)$ =1 and $|A_{2\times 2}| \neq 0$ and $A^t_{2\times 2} \neq I$ for $t \in 1, 2, 3, \ldots$ is developed and its weaknesses are investigated.

The encryption from monofunction transformation is extended to Cipher Digraphic Polyfunction transformation modulo N with different encryption keys used in every transformation [3]. An encryption of Cipher Digraphic Polyfunction is defined as $C^{(t)}_{2\times j} \equiv \prod_{u=0}^{t-1} A^{(t-u)}_{2\times 2} P_{2\times j}$ *mod* N, $|A^{(t)}_{2\times 2}| \neq 0$ and $(|A^{(t)}_{2\times 2}|, N) = 1$ for every $t = 1, 2, 3, \ldots$, then $P_{2\times j}$ has a unique solution and the decryption algorithm is defined as $P_{2\times j} \equiv (\prod_{u=0}^{t-1} A^{(t-u)}_{2\times 2})^{-1} C^{(t)}_{2\times j}$ *mod* N. They also stated condition $\prod_{u=0}^{t-1} A^{(t-u)}_{2\times 2} \not\equiv I$ *mod* N to be held, so that the cipher text would not be the same as plain text.

According to [5], the decryption process requires using an inverse of matrix but the matrix's inverse does not always exist. If the matrix is not invertible, then the encrypted text cannot be decrypted. They noticed the problem of non-invertible matrix key in Hill Cipher and proposed methods of generating self-invertible matrices based on modular arithmetic. This is to make sure that the encrypted text can be decrypted. They are focusing on generating self-invertible matrix 3×3 and $n \times n$ for n is even. This technique can eliminate the computational complexity involved in finding inverse of the matrix during decryption process. They proposed a method of generating of self-invertible $n \times n$ matrix where n is even.

The effect of self-invertible matrix on Cipher Tetragraphic Trifunction were presented by [7]. The authors gave some solutions for $L^3_{2\times 2} \equiv A_{2\times 2}$ *mod* N. As a result, they choose the $L_{2\times 2}$ so that A is not in the form of $A \equiv 0$ *mod* N, $A \equiv I$ *mod* N, lower and upper triangular matrix A. Furthermore, the use of a secret key $L_{4\times 4} \equiv \begin{bmatrix} L_{2\times 2} & I - L_{2\times 2} \\ I + L_{2\times 2} & -L_{2\times 2} \end{bmatrix} \mod N$ should be avoided in order to enhance the security of Cipher Tetragraphic Trifunction transformations, $C^{(t)}_{4\times 4} \equiv L^t_{4\times 4} P_{4\times 4}$*mod* N where $t \in 1, 2, 3$.

Several definitions and theorem (refer to [1, 2, 3, 5]) that should be understood in this paper are as follows:

Definition. *Let N be any positive integer. Let us say that the encryption key for every transformation t be an $i \times i$ matrix $A^{(t)}_{i\times i}$ mod N. Encryption algorithm of plain text $P_{i\times j}$ for the first transformation will produce a cipher text $C^{(1)}_{i\times j}$ through $C^{(1)}_{i\times j} \equiv A^{(1)}_{i\times i} P_{i\times j}$ mod N which is called Cipher Polygraphic Monofunction Transformation. Next, the cipher text $C^{(1)}_{i\times j}$ was translated into a cipher text $C^{(2)}_{i\times j}$ at the second transformation through $C^{(2)}_{i\times j} \equiv A^{(2)}_{i\times i} C^{(1)}_{i\times j}$ mod N which is called Cipher Polygraphic Difunction Transformation. After that, the cipher text $C^{(2)}_{i\times j}$ was translated into a cipher text $C^{(3)}_{i\times j}$ at the third transformation through $C^{(3)}_{i\times j} \equiv A^{(3)}_{i\times i} C^{(2)}_{i\times j}$ mod N which is called Cipher Polygraphic Trifunction Transformation. Further, the equation of Cipher Polygraphic Polyfunction Transformation is $C^{(t)}_{i\times j} \equiv A^{(t)}_{i\times i} C^{(t-1)}_{i\times j}$ mod N. The transformation can be simplified as $C^{(t)}_{i\times j} \equiv$*

$A^t_{i\times i}P_{i\times j}$ mod N if all the secret keys $A^{(t)}_{i\times i}$ are similar.

In this research, we used $i = 6$ so that it is called Cipher Hexagraphic Polyfunction. Whereas, all the secret keys $A^{(t)}_{6\times 6}$ are similar so that the transformation can be simplified as $C^{(t)}_{6\times j} \equiv A^t_{6\times 6}P_{6\times j}\ mod\ N$. Cipher Hexagraphic Polyfunction Transformation is constructed based on the following theorem.

Theorem. *Let Cipher Hexagraphic Polyfunction Transformation be defined as Definition 2.6. Say that the determinant for $A_{6\times 6}$ is not a zero and $(|A_{6\times 6}|, N) = 1$, so $P_{6\times j}$ have unique solutions and the decryption algorithms are as follows:$C^{(t-1)}_{6\times j} \equiv A^{-1}_{6\times 6}C^{(t)}_{6\times j} mod\, N$, $C^{(t-2)}_{6\times j} \equiv A^{-1}_{6\times 6}C^{(t-1)}_{6\times j} mod\, N$, …, $C^{(2)}_{6\times j} \equiv A^{-1}_{6\times 6}C^{(3)}_{6\times j} mod\, N$, $C^{(1)}_{6\times j} \equiv A^{-1}_{6\times 6}C^{(2)}_{6\times j} mod\, N$, $P_{6\times j} \equiv A^{-1}_{6\times 6}C^{(1)}_{6\times j} mod\, N$ where $A^{-1}_{6\times 6}$ is the inverse matrix for $A_{6\times 6}$ which acts as the decryption key.*

Definition. *A is called a self-invertible matrix if $A \equiv A^{-1}$ mod N. If A and A^{-1} are $n \times n$ matrices of integers and if $AA^{-1} \equiv A^{-1}A \equiv I$ mod N, where I is an identity matrix of order n, then A^{-1} is said to be an inverse of A modulo N.*

We assume the encryption key $A_{3\times 3} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *mod N* and $L_{3\times 3} \equiv \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ *mod N* with $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ and a_{ij} for $i, j = 1, 2, 3$ are integers such that $L^2_{3\times 3} \equiv A_{3\times 3}$ *mod N*. To get $L_{3\times 3}$, we need to solve simultaneous equations as shown below.
$a^2 + bd + cg \equiv a_{11}\ mod\ N$, $ab + be + ch \equiv a_{12}\ mod\ N$, $ac + bf + ci \equiv a_{13}\ mod\ N$, $da + ed + fg \equiv a_{21}\ mod\ N$, $db + e^2 + fh \equiv a_{22}\ mod\ N$, $dc + ef + fi \equiv a_{23}\ mod\ N$, $ga + hd + ig \equiv a_{31}\ mod\ N$, $gb + he + hi \equiv a_{32}\ mod\ N$ and $gc + hf + i^2 \equiv a_{33}\ mod\ N$. Now, we get some solutions for a Diagonal Matrix $L^2_{3\times 3} \equiv A_{3\times 3}$ *mod N* as follows.

Proposition. *Let $L_{3\times 3} \equiv \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ mod N and b, c, d, f, g, h be relatively prime with N. The solution to a diagonal matrix $L^2_{3\times 3}$ mod N is $L_{3\times 3} \equiv \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & bc^{-1}d^{-1}fg & i \end{bmatrix}$ mod N, where $a = 2^{-1}(-bfc^{-1} + dcf^{-1} - fgd^{-1})$, $e = 2^{-1}(bfc^{-1} - dcf^{-1} - fgd^{-1})$ and $i = 2^{-1}(-bfc^{-1} - dcf^{-1} + fgd^{-1})$.*

Also, obtaining the solutions for $L^2_{3\times 3} \equiv A_{3\times 3}$ *mod N* where $A_{3\times 3}$ is a symmetric matrix as follows.

Proposition. *Let* $L_{3\times3} \equiv \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ *mod* N *and* $(2, N) = (b-d, N) = (c-g, N) = (f-h, N) = 1$. *Then* $L_{3\times3}$ *with* $a = 2^{-1}((fg-ch)(b-d)^{-1}-(gb-dc)(f-h)^{-1}+(hd-bf)(c-g)^{-1})$, $e = 2^{-1}((gb-dc)(f-h)^{-1}-(hd-bf)(c-g)^{-1}+(fg-ch)(b-d)^{-1})$ *and* $i = 2^{-1}((hd-bf)(c-g)^{-1}-(fg-ch)(b-d)^{-1}+(gb-dc)(f-h)^{-1})$ *are solutions to a symmetric matrix* $L^2_{3\times3}$ *mod* N.

From Proposition 2.6, we obtained some corollaries.

Now, we apply the method of generating of self-invertible $n \times n$ matrices that was mentioned in [5]. We choose $n = 6$ and Proposition 2.6. Consider $L_{3\times3}$ and $L_{6\times6}$ as two secret keys. Let $L_{3\times3} \equiv \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & -a-fgd^{-1} & f \\ g & bc^{-1}d^{-1}fg & -a-bfc^{-1} \end{bmatrix}$ *mod* N with $a = 2^{-1}(-fgd^{-1} + dcf^{-1} - bfc^{-1})$, where b, c, d, f, g, h are relatively prime with N. This is the solution to a diagonal matrix $L^2_{3\times3}$ *mod* N using Proposition 2.6.

Now, let

$A_{11} = L_{3\times3}$ and

$$A_{22} \equiv -A_{11} \equiv -L_{3\times3} \equiv \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & a+fgd^{-1} & -f \\ -g & -bc^{-1}d^{-1}fg & a+bfc^{-1} \end{bmatrix} mod\ N.$$

We choose $k = 1$, therefore

$$A_{12} \equiv k(I - A_{11}) \equiv \begin{bmatrix} 1-a & -b & -c \\ -d & 1+a+fgd^{-1} & -f \\ -g & -bc^{-1}d^{-1}fg & 1+a+bfc^{-1} \end{bmatrix} mod\ N.$$

and

$$A_{21} \equiv I + A_{11} \equiv k^{-1}(I + L_{3\times3}) \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1+a & b & c \\ d & 1-a-fgd^{-1} & f \\ g & bc^{-1}d^{-1}fg & 1-a-bfc^{-1} \end{bmatrix} mod\ N.$$

Since $L_{6\times6} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ *mod* N.

Suppose $k = 1$, using similar procedure as mentioned above, we can get another eight type of self-invertible matrices produced by $L_{3\times3}$ from Proposition 2.6 and its Corrolaries. Followed by finding the Effect of Self-invertible Key on Cipher Hexagraphic Polyfunction.

Reference

[1] Panigrahy, K.S.; Acharya, B; Jena, D. Image Encryption Using Self-Invertible Key Matrix of Hill Cipher Algorithm. In Proceedings of the International Conference on Advance in Computing, Chikhli, India, 21–22 February 2008; pp. 1–4.

[2] Yunos, F. Beberapa Penggunaan Teori Nombor Dalam Kriptografi. Master Thesis, University Putra Malaysia, Serdang, Malaysia, 2001.

[3] Yunos, F.; Said, M.R.M; Atan, K.A.M. Transformasi Polifungsi Saifer Digrafik Bermodulo N_1 dalam Sistem Kriptografi. In Proceeding Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-9; Persatuan Sains Matematik Malaysia; Institut Statistik Malaysia dan Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Kebangsaan Malaysia: Selangor, Malaysia, 2001; pp 88–95.

[4] Acharya, B.; Rath, G.S.; Patra, S.K.; Panigrahy, S.K. Novel Methods of Generating Self-invertible Matrix for Hill Cipher Algorithm. Int. J. Secur. 2007, 1, 14–21.

[5] Rivest, R.; Shamir, A.; Adleman, L. A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems. Commun. ACM 1978, 21, 120–126.

[6] Smith, P. LUC Public Key Encryption: A Secure Alternative to RSA. Dr. Dobb'S J. 1993, 18, 44–48.

[7] Yunos, F.; Chin, L.S.; Said, M.R.M. Effect of Self-Invertible Matrix on Cipher Tetragraphic Trifunction. In AIP Proceeding SKSM25; Persatuan Sains Matematik Malaysia; AIP Publishing: Melville, New York, 2016.

[8] Rosen, K.H. Elementary Number Theory and Its Applications (Six Edition); Lebanon, Indiana, U.S.A.: Addison-Wesley, New Jersey, 1987; pp. 224–230.

[9] Kahn, D. The Codebreakers. The Story of Secret Writing; Weidenfeld and Nicolson, London: Macmillan, New York, 1967; p. 404.

On Dynamics of p-adic Potts-Bethe Function

O.N.Khakimov

Uzbekistan Academy of Sciences, Institute of Mathematics

hakimovo@mail.ru

Models of interacting systems have been intensively studied in the last years and new methodologies have been developed in the attempt to understanding their intriguing features. One of the most promising directions is the combination of statistical mechanics tools and methods adopted in dynamical systems. One of such tools is the renormalization group (RG) which has had a profound impact on modern statistical physics.In this work, we are interested in the following question: how is the existence of the phase transition related to chaotic behavior of the associated p-adic dynamical systems(this is one of the important question in physics [1])? It is known that for this model there exists a phase transition if q is divisible by p. We will show that, in the phase transition regime, the associated p-adic dynamical system is chaotic, i.e. it is conjugate to the full shift.

We consider the p-adic Potts-Bethe function which for any periodic point of that defines exactly one Gibbs measure on a Cayley tree of order k:

$$f_\theta(x) = \left(\frac{\theta x + q - 1}{x + \theta + q - 2}\right)^k$$

where $|\theta - 1|_p < 1$ and $q \geq 3$ natural number. It is easy to check that if $k = 2$ then f_θ has three fixed points: $x_0 = 1$ and

$$x_{1,2} = \frac{-2(q-1) - (\theta-1)^2 \pm (\theta-1)\sqrt{-4(q-1) + (\theta-1)^2}}{2}.$$

Theorem 1. *Let $k = 2$. Then for the fixed points x_0, x_1, x_2 of f_θ the following statements hold:*

(i) x_0 is an attracting fixed point;

(ii) x_1 andx_2 are repelling fixed points.

Now, we are going to describe basin of attraction $A(x_0)$ of the fixed point $x_0 = 1$. Let us denote

$$K = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p < |q_p|\}.$$

Theorem 2. *Let $k = 2$ and $p \geq 3$. If $0 < |\theta - 1|_p < |q|_p$ then $A(x_0) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(K)$.*

Theorem 3. *Let $k = 2$, $|\theta - 1|_p \leq p^{-2n-1}$, $r = |p^n(\theta - 1)|_p$ for some $n \geq 0$. If $X = B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$ then the dynamics $(J_{f_\theta}, f_\theta, |\cdot|_p)$ is isometrically conjugate to the full shift dynamics of two symbols. Here $J_{f_\theta} = \bigcap_{n\geq 0} f_\theta^{(-n)}(X)$.*

Reference

[1] Gyorgyi G, Kondor I, Sasvari L, Tel T. Phase transitions to chaos. Singapore: World Scientific; 1992.

Potts Model on a Cayley Tree in the Presence of Three Competing Interactions

A.M.Rahmatullaev

Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy, Uzbekistan

anasbek.rahmatullaev@gmail.com

We will consider a semi-infinite Cayley tree Γ^2_+ of second order, i.e.an infinite graph without cycles with 3 edges issuing from each vertex except for x^0 which has only 2 edges.

Let denote the Cayley tree as $\Gamma^2_+ = (V, L)$, where V is the set of vertices and L is the set of edges. Two vertices x and y, $x, y \in V$ are called *nearest-neighbors* if there exists an edge $l \in \Lambda$ connecting them, which is denoted by $l = \langle x, y\rangle$. The distance $d(x, y), x, y \in V$, on the Cayley tree Γ^2_+, is the number of edges in the shortest path from x to y. For a fixed $x^0 \in V$ we set

$$W_n = \{x \in V | d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V | d(x, x^0) \leq n\}$$

and L_n denotes the set of edges in V_n. The fixed vertex x^0 is called the 0-th level and the vertices in W_n are called the n-th level. For the sake of simplicity we put $|x| = d(x, x^0)$, $x \in V$. Two vertices $x, y \in V$ are called *the next-nearest-neighbors* if $d(x, y) = 2$. The next-nearest-neighbor vertices x and y are called *prolonged next-nearest-neighbors* if $|x| \neq |y|$ and is denoted by $\widetilde{\rangle x, y \langle}$. Three vertices x, y and z are called a triple of neighbors, and they denoted by $\langle x, y, z\rangle$ if $\langle x, y\rangle$ and $\langle y, x\rangle$ are nearest-neighbors. The triple of vertices $x, y, z \in V$ is called *two level* and denoted $\overline{\langle x, y, z\rangle}$ if $y \in W_n$ and $x, z \in W_{n+1}$ for some n.

For the 3-state Potts model with spin values in $\Phi = \{1, 2, 3\}$, the relevant Hamiltonian with competing nearest-neighbor, prolonged next-nearest-neighbor interactions and two-level triple-neighbor triple-neighbor interactions has the form

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_p \sum_{\widetilde{\rangle x,y \langle}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_t \sum_{\overline{\langle x,y,z\rangle}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)}, \qquad (1)$$

where $J_1, J_p, J_t \in R$ are coupling constants with $J_1 > 0, J_p < 0$ and $\langle x, y\rangle$ stands for nearest-neighbors vertices and $\widetilde{\rangle x, y \langle}$ stands for next-nearest-neighbor interaction restricted to the sites belonging to the same branch and $\overline{\langle x, y, z\rangle}$ two-level triple-neighbor interactions.

In this paper we consider $\delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)}$ as follows

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The case $J_t = 0$ was considered in [1]. Follow the papers [2] to produce the recurrent equations, we consider the relation of the partition function on V_n to the partition function on subsets of V_{n-1}. Let $Z^{(n)}(i_1, i_0, i_2)$ be a partition function on V_n where the spin in the root x^0 is i_0 and the two spins in the proceeding x^1 and x^2 are i_1 and i_2, respectively. As shown in [2] one can select only five independent variables $Z^{(n)}(1, 1, 1)$, $Z^{(n)}(2, 1, 2)$, $Z^{(n)}(1, 2, 1)$, $Z^{(n)}(2, 2, 2)$, $Z^{(n)}(3, 2, 3)$ and with the introduction of new variables

$u_1^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(1, 1, 1)}$, $u_2^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(2, 1, 2)}$, $u_3^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(1, 2, 1)}$,
$u_4^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(2, 2, 2)}$, $u_5^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(3, 2, 3)}$,

and the total partition function is given in terms of (u_i) by

$$Z^{(n)} = (u_1^{(n)} + 2u_2^{(n)})^2 + 2(u_3^{(n)} + u_4^{(n)} + u_5^{(n)})^2, \qquad (2)$$

where β is the inverse temperature and $a = \exp(\beta J_1), b = \exp(\beta J_p)$ and $c = exp(\beta J_t/2)$. We note that, in the paramagnetic phase (high symmetry phase), $u_1 = u_4$ and $u_2 = u_3 = u_5$. For discussing the phase diagram, the following choice of reduced variables is convenient:

$$x = \frac{2u_2 + u_3 + u_5}{u_1 + u_4}, \quad y_1 = \frac{u_1 - u_4}{u_1 + u_4}, \quad y_2 = \frac{u_2 - u_3}{u_1 + u_4}, \quad y_3 = \frac{u_2 - u_5}{u_1 + u_4}. \qquad (3)$$

Theorem. *If there exist such $a > 0, b > 0, c > 0$ that the basic equation (3) has more than one positive invariant points than takes place phase transition for* *the model (1).*

References

[1] N. Ganikhodjaev and A. Rahmatullaev, Journal of Physics: Conference Series 435 012035 (2013)

[2] N.N. Ganikhodjaev, F.M. Mukhamedov and C.H. Pah, Phys. Lett. A **373**, 33 (2008)

The Polynomial Dynamical System with the Limit Set, Consisting of N Connectivity Components

D.H.Ruzimuradova[1], **S.A.Kuchkarova**[2]
[1]*National University of Uzbekistan*
[2]*Tashkent Pedagogical University*
d.ruzimurodova@mail.ru, kuchkarov1@yandex.ru

Consider a dynamical system

$$\dot{z} = f(z), \tag{1}$$

$z \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. It is known, if the ω-limit set Ω of dynamical system (1) is bounded, then it is non-empty connected compact set [1]-[3]. Ω can be a point or a closed trajectory in simple cases but in the general case Ω may have rather complicated structure especially for $d \geq 3$. The structure of Ω was studied rigorously when $d = 2$ [4]-[6]. In this work, the polynomial system with the ω-limit set, consisting of N connectivity components is constructed for a given natural number $N \geq 3$. The same task was considered in [7] and the polynomial system of the degree $10N - 1$ was constructed. Here another polynomial system will be suggested that has N connectivity components but its degree is $2N + 2$ if N is odd, $2N + 3$ if N is even.

For that take the analytical function

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - y\prod\limits_{i=1}^{m}\left(i^2 - x^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^{m+1}} & \text{if } N \text{ is odd,} \\[2ex] \dfrac{1 - yx\prod\limits_{i=1}^{m}\left(i^2 - x^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^{m+2}} & \text{if } N \text{ is even,} \end{cases}$$

where m is the integer part of $\frac{N-1}{2}$.

It is easy to check that for the function $F(x, y)$ the level line $F(x, y) = 0$ consists of N connectivity components.

Now we consider the dynamical system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_y(x, y) - \lambda F(x, y)\, F_x(x, y), \\ \dot{y} &= -F_x(x, y) - \lambda F(x, y)\, F_y(x, y), \end{aligned} \tag{2}$$

where λ is a positive number.

Theorem. *The level line $F(x,\, y) = 0$ serves as the ω-limit set of the trajectory $(x(t)\,,\, y(t))$ of the polynomial system (2), passing through a point $(x_0,\, y_0)\,,$ chosen from the region $F(x_0,\, y_0) > 0.$*

Corollary. The system (2) has the ω-limit set with N connectivity components.

References

[1] Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. Wiley, NewYork, Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems, (1973).

[2] Birkhoff, G.D. Dynamical systems, New York, American Math. Soc. Colloquium Publications, No 9, (1927).

[3] Lopez V.J., Llibre J.S. A topological characterization of the – limit sets for analytic flows on the plane, the sphere and the projective plane, Adv. Math, Vol. 216, No2, (2007), pp. 677-710.

[4] Lopez V.J., Lopez G.S. A characterization of the – limit sets for continuous flows on surfaces, Boll. Union Mat., Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat., Vol. 9, No 8, (2006), pp. 515-521.

[5] Vinograd R. On the limit behavior of an unbounded integral curve, Russian, Moskov. Gos. Univ. Zap. 155, Mat. 5, (1952), pp. 94-136.

[6] Azamov A.A., Ruzimuradova D.H. On Unbounded Limit Sets of Dynamical Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings (ISSN 2522-5383) (imprint).

On p-adic $(3,2)$-Rational Dynamical System with Three Fixed Points

I.A.Sattarov

Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy, Uzbekistan

sattarovi-a@yandex.ru

Let Q be the field of rational numbers. The greatest common divisor of the positive integers n and m is denotes by (n,m). Every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$, where $r, n \in \mathbb{Z}$, m is a positive integer, $(p,n) = 1$, $(p,m) = 1$ and p is a fixed prime number.

The p-adic norm of x is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{for } x \neq 0, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

The completion of Q with respect to p-adic norm defines the p-adic field which is denoted by Q_p (see [1]).

The algebraic completion of Q_p is denoted by C_p and it is called *complex p-adic numbers*. For any $a \in C_p$ and $r > 0$ denote

$$U_r(a) = \{x \in C_p : |x-a|_p < r\}, \quad V_r(a) = \{x \in C_p : |x-a|_p \leq r\},$$

$$S_r(a) = \{x \in C_p : |x - a|_p = r\}.$$

Now let $f : U \to U$ be a function. Denote $f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(x)$.

If $f(x_0) = x_0$ then x_0 is called a *fixed point*. The set of all fixed points of f is denoted by $\mathrm{Fix}(f)$. A fixed point x_0 is called an *attractor* if there exists a neighborhood $U(x_0)$ of x_0 such that for all points $x \in U(x_0)$ it holds $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$. If x_0 is an attractor then its *basin of attraction* is $A(x_0) = \{x \in C_p : \ f^n(x) \to x_0, \ n \to \infty\}$. A fixed point x_0 is called *repeller* if there exists a neighborhood $U(x_0)$ of x_0 such that $|f(x) - x_0|_p > |x - x_0|_p$ for $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$.

We consider the dynamical system associated with the $(3, 2)$-rational function $f : C_p \to C_p$ defined by

$$f(x) = ax\left(\frac{x+b}{x+c}\right)^2, \quad a(a-1)(b-c)(ab^2 - c^2) \neq 0, \quad a, b, c \in C_p. \qquad (1)$$

where $x \neq \hat{x} = -c$.

Note that, function (1) has three fixed points $x_0 = 0$, $x_1 = -\frac{b\sqrt{a}-c}{\sqrt{a}-1}$ and $x_2 = -\frac{b\sqrt{a}+c}{\sqrt{a}+1}$.

For $x \in S_{|b|_p}(0)$, we denote

$$b^*(x) = |a|_p|b|_p \cdot \frac{|x+b|_p^2}{|x+c|_p^2}.$$

It is studied a p-adic dynamical system generated by f.

References

[1] Koblitz N., p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-function. Springer, Berlin, 1977.

[2] Rozikov U.A., Sattarov I.A. p-adic dynamical systems of $(2, 2)$-rational functions with unique fixed point. Chaos, Solitons and Fractals, 105 (2017), 260–270.

On Behavior of a Model Dynamical System at Infinity

A.Tilavov

Uzbekistan Academy of Science Institute of Mathematics

asliddintm@mail.ru

At the present time, Theory Dynamical Systems are one of the fastest growing branches of Mathematics, and interest to this field is being grown not only by Mathematicians, but also physicists, biologists, mechanics, and other specialists in the field of science and technology. A qualitative analysis of linear dynamical systems have been completely investigated, but for nonlinear dynamic systems, even for quadratic systems the problem remains difficult in spite of existence of powerful methods.

Consider the simplest dynamical system with a quadratic term

$$\dot{x} = ax + y + x^2, \quad \dot{y} = bx + y \tag{1}$$

In this article, the behavior of the system (1) at infinity is studied.

For this purpose we will use the method, proposed in [1]. It transforms the system (1) to three-dimensional dynamical system given on Poincaré sphere [2] in the form

$$\dot{X} = (Y + Z)\,P^* - XQ^*, \; \dot{Y} = (X + Z)\,Q^* - XP^*, \; \dot{Z} = -XP^* - YQ^*$$

where $P^* = aXZ + YZ + X^2, \;\; Q^* = bXZ + YZ.$

It is well known that the trajectory of the system (1) in a neighborhood of the equator of the Poincaré sphere shows its behavior at infinity. For the system (1) it is valid the

Theorem. *For any real* a, b, *the system has non-hyperbolic saddle-node equilibrium points* $(0, \pm 1, 0)$ *at infinity.*

References

[1] Azamov A. Suvanov Sh. Tilavov A. Studying of Behavior at Infinity of Vector Fields on Poincares Sphere // Revisited. Qual. Theory Dyn. Syst. 15 (2016), No.1, pp. 211-220.

[2] Perko L. Differential Equations and Dynamical Systems. – 3^{rd} edition, Springer-Verlag, New York, 2001, 555 p.

Динамическая система, моделирующая гемофилию

А.Т.Абсаламов, У.А.Розиков
rozikovu@yandex.com

Гемофилия – наследственное заболевание, связанное с нарушением коагуляции (процессом свёртывания крови); при этом заболевании возникают кровоизлияния в суставы, мышцы и внутренние органы, как спонтанные, так и в результате травмы или хирургического вмешательства.

Рассмотрим нелинейный оператор, который порождает динамическую систему, описывающую эволюцию гемофилии.

Пусть

$$\gamma_{ij,k}^{(f)} \geq 0, \; \gamma_{ik,l}^{(m)} \geq 0, \; \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij,k}^{(f)} + \sum_{l=1}^{v} \gamma_{ij,k}^{(m)} = 1, \; \forall i, j, k, l. \tag{1}$$

Определим оператор (см. [1], [2]) $V : (x, y) \mapsto (x', y')$, задаваемый формулами

$$x_j^{'} = \frac{\sum_{i,k=1}^{n,v} \gamma_{ij,k}^{(f)} x_i y_k}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{j=1}^{v} y_j)}, j = \overline{1, n} \qquad y_l^{'} = \frac{\sum_{i,k=1}^{n,v} \gamma_{ij,k}^{(m)} x_i y_k}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{j=1}^{v} y_j)}, l = \overline{1, v}. \tag{2}$$

Обозначим

$$S^{n+v-1}=\left\{s=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_v)\in\mathbb{R}^{n+v}:x_i\geq 0,y_j\geq 0,\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{j=1}^n y_j=1\right\},$$

$O=\left\{s\in S^{n+v-1}:(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)\text{ или }(y_1,\dots,y_v)=(0,\dots,0)\right\}$, $S^{n,v}=S^{n+v-1}\setminus O$.

Теорема 1. *Оператор (2) с коэффицентами (1) отображает $S^{n,v}$ в себя тогда и только тогда, когда*

$$(\gamma_{ik,1}^{(f)},...,\gamma_{ik,n}^{(f)},\gamma_{ik,1}^{(m)},...,\gamma_{ik,v}^{(m)})\in S^{n,v},\quad \forall i,k. \tag{3}$$

Следующий оператор описывает гемофилию

$$V:\begin{cases} x'=\frac{2xu+yu}{4(x+y)(u+v)}\\ y'=\frac{6xv+3yu+4yv}{12(x+y)(u+v)}\\ u'=\frac{6xu+6xv+3yu+4yv}{12(x+y)(u+v)}\\ v'=\frac{3yu+4yv}{12(x+y)(u+v)}\end{cases} \tag{4}$$

Ясно, что $V:S^{2,2}\to S^{2,2}$.

Теорема 2. *Оператор (4) имеет единственную неподвижную точку $p=(1/2,0,1/2,0)$ и для любой начальной точки $s\in S^{2,2}$ выполняется*

$$\lim_{n\to\infty}V^n(s)=p$$

Литература

[1] Rozikov U.A., Varro R. Dynamical systems generated by a gonosomal evolution operator. Jour. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016. V. 5, No. 2, pp. 173-185.

[2] Lyubich Y.I. Mathematical structures in population genetics, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Существование простых периодических решений в многомерных колебаниях с импульсным воздействием

К.К.Елгондиев, О.О.Курбанбаев

Каракалпакский государственный университет

qoo1958@mail.ru

Рассматривается задача о существований простых периодических решений многомерных колебательных системах с импульсным воздействием, когда действия импульсных сил происходит в моменты достижения полной энергии системы фиксированного значения.

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}=a^2\Delta u-2\nu u_t, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\begin{array}{l} u(x_1,\ x_2, ..., x_n, 0) = \varphi(x_1,\ x_2, ..., x_n), \\ u_t(x_1,\ x_2, ..., x_n, 0) = \psi(x_1,\ x_2, ..., x_n), \end{array} \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{array}{l} u(0,\ x_2, ..., x_n, t) = u(l_1,\ x_2, ..., x_n, t) = 0, \\ u(x_1,\ 0, ..., x_n, t) = u(x_1,\ l_2,\ ..., x_n, t) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(x_1,\ x_2, ..., 0, t) = u(x_1,\ x_2, ..., l_n, t) = 0, \end{array} \tag{3}$$

где $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$– оператор Лапласа, $u(x_1,\ x_2, ..., x_n, t)$ смещение параллелепипеда в момент времени t, $\varphi \in C^4(\Omega)$, $\psi \in C^3(\Omega)$, $\varphi|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega} = 0$, $\nu = const > 0$,

$$\Omega = \{(x_1,\ x_2, ..., x_n) : 0 \le x_1 \le l_1,\ 0 \le x_2 \le l_2, ..., 0 \le x_n \le l_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

В области $G = \Omega \times [0, +\infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ рассмотрим колебания параллелепипеда, приняв в качестве регулирующего функционала полную энергию колебания

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} a^2 \left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u_t^2 \right) dx$$

с заданным критическим значением $E_0 > 0$ и законом импульсного воздействия

$$\begin{array}{l} u(x_1,\ x_2, ..., x_n, t+0) - u(x_1,\ x_2, ..., x_n, t-0)|_{E_u(t)=E_0} = \alpha(x_1,\ x_2, ..., x_n), \\ u_t(x_1,\ x_2, ..., x_n, t+0) - u_t(x_1,\ x_2, ..., x_n, t-0)|_{E_u(t)=E_0} = \beta(x_1,\ x_2, ..., x_n), \end{array} \tag{4}$$

где $\alpha \in C^4(\Omega)$, $\beta \in C^3(\Omega)$, $\alpha|_{\partial\Omega} = \beta|_{\partial\Omega} = 0$ – заданные функции, $(x_1,\ x_2, ..., x_n) \in \Omega$.

Определение. *Периодическое решение задачи (1)-(4) назовем простым, если расстояние между его соседними моментами импульсов постоянно и равно периоду этого решения.*

Теорема. *Если T расстояние между соседними моментами импульсного воздействия при заданном $E_u(t) = E_0$ функции α и β удовлетворяют требованиям $\alpha \in C^4(\Omega)$, $\beta \in C^3(\Omega)$ и $\alpha|_{\partial\Omega} = \beta|_{\partial\Omega} = 0$, справедливы равенства $\varphi^{(1)}_{m_1,..,m_n} = \varphi^{(2)}_{m_1,..,m_n} = ... = \varphi^{(k)}_{m_1,..,m_n} = ...; \psi^{(1)}_{m_1,..,m_n} = \psi^{(2)}_{m_1,..,m_n} = ... = \psi^{(k)}_{m_1,..,m_n} = ...$, то задача (1)-(4) имеет простое периодическое решение вида.*

Литература

[1] Елгондиев К.К., Хасанов М. Колебания струны с импульсным воздействием // Крайові задачі для дифференціальних задач: 36 наук. пр. 2002. Вип. 10. С. 96-102.

Динамика одного квадратичного стохастического оператора с переменными коэффициентами

М.А.Кодирова
Наманганский государственный университет
malika24kodirova@gmail.com

Пусть $\Sigma^{n-1}=\left\{x=(x_1,\ldots,x_n): \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1, x_i\geq 0\right\}$ – $(n-1)$-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Известно [1], что квадратичный стохастический оператор (к.с.о.) $V:\Sigma^{n-1}\to\Sigma^{n-1}$ определяется равенствами:

$$(Vx)_k=x'_k=\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k}x_ix_j, k=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где $p_{ij,k}\geq 0, p_{ij,k}=p_{ji,k}, \sum\limits_{k=1}^{n} p_{ij,k}=1$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\Sigma^{n-1}$. Более того, к.с.о. $V:\Sigma^{n-1}\to\Sigma^{n-1}$ будем называть вольтеровским, если $p_{ij,k}=0$ при $k\bar{\in}\{i,j\}$ (см.[1]).

Если $V:\Sigma^{n-1}\to\Sigma^{n-1}$ вольтеровский оператор, то $x'=Vx$ можно записать в виде:

$$x'_k=x_k\left(1+\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i\right), k=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $a_{ki}=-a_{ik}$, $|a_{ki}|\leq 1$.

Из [2] известно, что квадратично стохастические V операторы с переменными коэффициентами определяются равенствами:

$$Vx:=\begin{cases} V_1x, & \text{если } x\in A,\\ V_2x, & \text{если } x\in S^{n-1}\setminus A,\end{cases} \tag{3}$$

где V_1 – к.с.о., V_2 – вольтеровский оператор и $A\subset\Sigma^{n-1}$.

Как частный случай рассмотрим динамику оператора (3)

$$V_1:\begin{cases} x'_1=ax_1^2+2x_1x_2+x_2^2,\\ x'_2=(1-a)\,x_1^2,\end{cases} \quad \text{и} \quad V_2:\begin{cases} x'_1=x_1\,(1+bx_2)\,,\\ x'_2=x_2\,(1-bx_1)\,.\end{cases}$$

V_1 – к.с.о., V_2 – вольтеровский оператор, отсюда, следует, что $a\in[0;1]\,, |b|\leq 1$. Пусть множество A определено следующим образом: $A=\left\{x\in S^1: x_1<\frac{1}{2}\right\}$ (в [2] приводится теорема о неподвижных точках оператора в этом представлении).

Теорема. *Если оператор (3) непрерывный, то у этого оператора существует единственная неподвижная точка* $(1;0)$, *но не существует периодическая точка второго порядка.*

Литература

[1] Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры. Мат. сборник, 1992, 183(8): 119-140.

[2] Кодирова М.А. Динамика квадратично стохастических операторов с переменными коэффициентами отображаемых $S^1 \to S^1$. Современные проблемы математики и информатики, Материалы республиканской научно-практической конференции. Фергана, 2019.

О геометрии множества достижимости

А.Я.Нарманов

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Пусть M – гладкое многообразие размерности n, $V(M)$ – множество всех гладких векторных полей, определенных на M. Обозначим через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли. Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^∞.

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру алгебры многообразим Ли, содержащую множество D. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено на некотором интервале $I(x) \subset R$, которая в общем случае зависит от начальной точки x.

Определение. *Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, ..., t_k$ и векторные поля $X_1 X_2, ..., X_k$ из D (где k – произвольное натуральное число) такие, что*

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(...(X_1^{t_1}(x))...)).$$

Определение. *Точка $y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(...(X_1^{t_1}(x))...)) \in L(x)$ называется T – достижимой из точки $x \in M$, если $\sum_i t_i = T$.*

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T – достижимы из точки x.

Изучению структуры множества достижимости и орбиты систем гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в теории оптимального управления, динамических системах, в геометрии и в теории слоений [1]-[4].

Используя идею работ Суссманна [4], получен ряд результатов.

Литература

[1] Нарманов А.Я. О множествах управляемости систем управления, являющихся слоями слоения коразмерности один. Дифференциальные уравнения. 1983, Т. 19, №9, С. 627-1630.

[2] Jurdjevic V. Geometric control theory., Cambridge University Press, 1997, 492 p.

[3] Stefan P. Accessible sets, orbits, and foliations with singularities. Proc. London Mathematical Society. 1974, V. 29, pp. 694-713.

[4] Sussmann H. Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, No 79, pp. 197-199.

$G_3^{(4)}$-слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли

М.М.Рахматуллаев[1], З.А.Бурхонова[2], М.А.Расулова[3]

[1,2] *Наманганский государственный университет*

[3] *Наманганский академический лицей при МВД РУз*

m_rasulova_a@rambler.ru

Пусть $\tau^k = (V,\, L)$, $k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, где V – множество вершин, L – множество ребер τ^k. Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка (см. [1]).

Мы рассматриваем модели, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1,\ 1\}$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Изинга имеет вид

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,\,y>\in L} \sigma(x)\,\sigma(y), \tag{1}$$

где $J \in R$, $<x,\,y>$ – ближайшие соседи.

Цель этой работы описать $G_k^{(4)}$-слабо периодиские меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k = 3$.

Известно, что меры $\mu_n(\sigma_n)$ удовлетворяют условия согласованности тогда и только тогда, когда совокупность величин $h = \{h_x,\ x \in G_k\}$ удовлетворяет

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} f(h_y, \theta), \tag{2}$$

где $S(x)$ – множество "прямых потомков" и точки $x \in V$, $f(x,\theta) = arcth\,(\theta\, thx)$, $\theta = th\,(J\beta)$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ – температура (см. [1]).

Для $x \in G_k$ обозначим через $x_\downarrow = \{y \in G_k :< x, y >\}\backslash S(x)$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\}$ – фактор группа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение. *Совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ назовем G_k^* – слабо периодической, если $h_x = h_{i\,j}$, при $x \in H_i$, $x_{\downarrow} \in H_j$ для любого $x \in G_k$.*

Определение. *Меру μ назовем G_k^* – слабо периодической, если она соответствует G_k^*– слабо периодической совокупности величин h.*

Пусть $A \subset \{1, 2, ..., k+1\}$. $H_A = \{x \in G_k : \sum\limits_{j\in A} \omega_j(x) \,\vdots\, 2\}$, где $\omega_j(x)$ – число a_j в слове $x, G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| \,\vdots\, 2\}$, где $|x|$ – длина слова $x \in G_k$ и $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ – является нормалным делителем индекса 4.

Рассмотрим фактор группу $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где

$H_0 = \{x \in G_k : \sum\limits_{j\in A} \omega_j(x) \,\vdots\, 2, |x| \,\vdots\, 2\}$, $\quad H_1 = \{x \in G_k : \sum\limits_{j\in A} \omega_j(x) \,\vdots\, 2, |x| \,\vdots\, 2\}$,

$H_2 = \{x \in G_k : \sum\limits_{j\in A} \omega_j(x) \,\vdots\, 2, |x| \,\vdots\, 2\}$, $\quad H_3 = \{x \in G_k : \sum\limits_{j\in A} \omega_j(x) \,\vdots\, 2, |x| \,\vdots\, 2\}$,

$G_k^{(4)}$ – слабо периодическая совокупность.

Теорема. *Пусть $k = 3$ и $|A| = 1$. Для модели Изинга справедливы следующие утверждения:*

1) при $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$ существует не менее трех $G_k^{(4)}$ – слабо периодических мер Гиббса;

2) при $\alpha \in R\backslash(0; \frac{1}{2})$ существует не менее одной $G_k^{(4)}$ – слабо периодических мер Гиббса.

Литература

[1] Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific. (2013).

[2] Rozikov U.A., A Constructive Description of Ground States and Gibbs Measures for Ising Model With Two-Step Interactions on Cayley Tree, Jour. Statist. Phys. 122: 217-235. (2006).

О некоторых краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией $\alpha\left(x\right) = 1 - x$

М.М.Хасанова

Андижанский государственный университет

В данной работе будем рассматривать задачу нахождении общее решение уравнения с инволюцией:

$$-u^{''}\left(1-x\right) - \lambda u\left(x\right) = f\left(x\right) \tag{1}$$

а также приводим решений краевых задач типа Дирихле и Неймана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Функция*

$$\begin{aligned} u(x) &= A\cos\sqrt{\lambda}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+Bsh\sqrt{\lambda}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+\\ &+\tfrac{1}{4\sqrt{\lambda}}\left(-\int\limits_0^x+\int\limits_x^1\right)\left[\sin\sqrt{\lambda}\,(x-t)-sh\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right]f(t)\,dt+\\ &+\tfrac{1}{4\sqrt{\lambda}}\left(-\int\limits_0^{1-x}+\int\limits_{1-x}^1\right)\left[\sin\sqrt{\lambda}\,(1-x-t)+sh\sqrt{\lambda}\,(1-x-t)\right]f(t)\,dt \end{aligned} \tag{2}$$

является общим решением уравнения (1) с инволюцией $\alpha(x)=1-x$, где A и B произвольные постоянные.

Согласно общему решению (2), для уравнения (1) можно рассмотреть краевые задачи типа Дирихле, Неймана и других.

а) краевая задача типа Дирихле. Решение краевой задачи типа Дирихле для уравнения (1) имеет вид

$$u(x)=\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\lambda}\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}\int\limits_0^1\cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{1}{2})\cdot f(t)\,dt+$$

$$+\frac{ch\frac{\sqrt{\lambda}}{2}sh\sqrt{\lambda}(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\lambda}sh\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}\int\limits_0^1 sh\sqrt{\lambda}(t-\frac{1}{2})\cdot f(t)\,dt$$

б) краевая задача типа Неймана. Дифференцируя (2), из краевых условий $u^{`}(-1)=0$ и $u^{`}(1)=0$, получим решение краевой задачи типа Неймана для уравнения (1):

$$u(x)=-\frac{\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\lambda}\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}\int\limits_0^1\cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{1}{2})\cdot f(t)\,dt+$$

$$+\frac{sh\frac{\sqrt{\lambda}}{2}sh\sqrt{\lambda}(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\lambda}sh\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}\int\limits_0^1 sh\sqrt{\lambda}(t-\frac{1}{2})\cdot f(t)\,dt$$

Литература

[1] Abdizhahan M. Sarsenbi. The theorem on the basis property of eigenfunctions of second order differential operators with involution, AIP, 1759, 020030 (2016).

Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для модели Блума-Капеля на дереве Кэли

Н.М.Хатамов[1], Д.Муйдинов[2]
[1,2]*Наманганский государственный университет*
nxatamov@mail.ru

Известно, что дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ представляется как группа G_k, являющаяся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ [1].

Рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, +1\}$. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A.

Гамильтониан модели Блума-Капеля определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle, x,y\in V;} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

где $J > 0$.

Пусть $x^0 \in V$-фиксированная точка. Обозначим:

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\},\ V_n = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\}.$$

Для $x \in W_n$, $n \geqslant 1$ обозначим

$$S(x) = \{y \in W_{n-1} : d(x, y) = 1\}.$$

Множество $S(x)$ называется "*прямых потомков*" вершины $x \in W_n$.

Пусть $h : x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{+1,x})$-вектор функция от $x \in V \diagdown \{x^0\}$. Рассмотрим вероятностное мера $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x}\}, \tag{2}$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$, $Z_n = \sum_{\overline{\sigma}_n\in\Omega_{V_n}} exp\{-\beta H(\overline{\sigma}_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\overline{\sigma}(x),x}\}$ и $h_{\overline{\sigma},x} \in R$.

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если $(\forall n \geq 1)$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{V_n}:\omega_n|V_{n-1}=\sigma_{n-1}} \mu^{(n)}(\omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{3}$$

В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V, такая, что

$$\mu(\{\sigma\ |_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на $h_{i,x}$, при которых выполняется (3).

Теорема 1. *Пусть $k \geq 2$. Вероятностное мера $\mu^{(n)}(\sigma_n), n = 1, 2, ...$ в (2) согласованно тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие:*

$$\begin{cases} z_{+1,x} = \prod_{y\in S(x)} \frac{\lambda z_{+1,y}+\frac{1}{\lambda}z_{-1,y}+1}{z_{+1,y}+z_{-1,y}+1}, \\ \\ z_{-1,x} = \prod_{y\in S(x)} \frac{\frac{1}{\lambda}z_{+1,y}+\lambda z_{-1,y}+1}{z_{+1,y}+z_{-1,y}+1}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\lambda = exp\{J\beta\}, \beta = 1/T, z_{i,x} = exp(h_{i,x} - h_{0,x}),\ i = +1, -1.$

Трансляционно-инвариантные (ТИ) меры Гиббса соответствуют решениям (4) с $z_{i,x} = z_i$ при всех $x \in V$ и $i = -1, +1$. Для удобства, перепишим $z_{+1} = z_1, z_{-1} = z_2$. Тогда (4) имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = (\frac{\lambda z_1+\frac{1}{\lambda}z_2+1}{z_1+z_2+1})^k, \\ z_2 = (\frac{\frac{1}{\lambda}z_1+\lambda z_2+1}{z_1+z_2+1})^k, \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя $z_1 = z_2 = z$, получим

$$z = [\frac{(\lambda + \frac{1}{\lambda})z + 1}{2z + 1}]^k. \quad (6)$$

Пусть $k \geq 2$. Для любого $\lambda > 0$ уравнение (6) имеет только единственное положительное решение.

Соответствующую этому решению трансляционно-инвариантную меру Гиббса обозначим через μ_0.

Теорема 2. *Пусть $k = 2$. Тогда для модели Блюма-Капеля мера μ_0 является крайней при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_1 \approx 0.336135$ и $\lambda_1 \approx 2.975$.*

Литература

[1] Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. (de Gruyter stadies in Math: Berlin), 1988.

О группах диффеоморфизмов слоеных многообразий

А.С.Шарипов

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Общеизвестно что группа диффеоморфизмов гладких многообразий имеет важное значение в дифференциальной геометрии и в анализе. Фундаментальными работами в этой области являются исследовании [2]-[4].

Интенсивное развитие теории группы диффеоморфизмов началось с работы В.И.Арнольда [2], в котором доказано, что движение идеальной несжимающийся жидкости является геодезическими на группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем элемента.

В статье рассматривается слоенное многообразие с и исследуется некоторые подгруппы его группы диффеоморфизмов. Известно, что группа диффеоморфизмов является топологической группой в компактно-открытой топологии. В случае, когда многообразие компактно, этот факт доказан в работе [1], (стр. 270). Для произвольного многообразия конечной размерности этот факт доказан в работе [5].

Пусть M – гладкое связное риманова многообразие размерности n, $0 < k < n$.

Через (M, F) обозначим гладкое многообразие M размерности n, на котором задано гладкое k-мерное слоение F, где $0 < k < n$. Пусть $L(p)$ – слой слоения F, проходящий через точку p, T_pF – касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p. Мы имеем подрасслоение (гладкое распределение) $TF = \{T_pF : p \in M\}$ касательного расслоения TM многообразие M. Обозначим через $V(M)$, $V(F)$ множество гладких сечений расслоений TM, TF соответственно.

Определение. *Если при диффеоморфизме $f : M \to M$ образ $f(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения F является слоем слоения F, то отображение $f : M \to M$ называется C^r – диффеоморфизмом слоеного многообразия и пишется в виде $f : (M, F) \to (M, F)$.*

Обозначим через $Diff_F(M)$ множество всех C^r – диффеоморфизмов слоенного многообразия (M, F), где $r \geq 0$. Группа $Diff_F(M)$ является подгруппой $Diff_F(M)$ и оно является топологической группой в компактно-открытой топологии. Мы вводим некоторую топологию на группе $Diff_F(M)$, которая зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n-мерным слоением.

Пусть $\{K_\lambda\}$ – семейство всех компактных множеств, где каждое K_λ принадлежит какому либо слою слоения F и пусть $\{U_\beta\}$ – семейство всех открытых множеств на M. Рассмотрим для каждой пары $K_\lambda \subset L_\alpha$ и любого U_β совокупность всех отображений $f \in Diff_F^r(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать через

$$[K_\lambda, U_\beta] = \{f : M \to M \ | f(K_\lambda) \subset U_\beta\}.$$

Нетрудно показать, что семейство всевозможных конечных пересечений множеств вида $[K_\lambda, U_\beta]$ образует базу для некоторой топологии. Эту топологию назовем слоено компактно-открытой топологией или коротко F – компактно-открытой топологией.

Пусть M – гладкое связное риманово многообразие конечной размерности.

Определение. *Изометрия $\phi : M \to M$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F), если оно является диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F).*

Обозначим через $Iso_F(M)$ множество всех C^r – изометрий слоеного многообразия (M, F), где $r \geq 0$. Имеет место $Iso_F(M) = Diff_F(M) \bigcap Iso(M)$.

Теорема 1. *Пусть (M, F) – гладкое связное полное слоеное риманово многообразие конечной размерности. Тогда группа $Iso_F(M)$ является топологической группой с компактно-открытой топологией.*

Обозначим через $Diff_F^0(M)$ множество всех C^r диффеоморфизмов $g \in Diff_F(M)$ слоеного многообразия (M, F) такое, что $g(L_\alpha) = L_\alpha$ для каждого слоя L_α слоения F. Поток каждого векторного поля состоит диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F), которые принадлежат группу $Diff_F^0(M)$. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть (M, F) слоеное многообразие, где M гладкое связное многообразие с конечной размерности. Тогда группа $Diff_F^0(M)$ является топологической группой с F – компактно-открытой топологией.*

Литература

[1] Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.

[2] Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimenzion infnite et ses applications a l'hidrodynamique des uides parfaits. Ann. Inst. Fourier, (1966), 16(1): 319-361.

[3] Lukatsky A. Finite generation of groups of diffeomorphisms. Russian Mathematical Surveys, (1978), 33(1): 207-208.

[4] Omori H. Group of diffeomorphisms and thier subgroups. Trans. Amer. Math. Soc, 1973, 1(79): 85-122.

[5] Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries. Methods of Functional Analysis and Topology, (2009), 15(2): 195-200.

Differential Equations. Дифференциальные уравнения

Some Relations from the Decomposition Formula for one Multidimensional Lauricella Hypergeometric Function

A.Hasanov, T.G.Ergashev

Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan

ergashev.tukhtasin@gmail.com

We consider the equation

$$L_{\alpha}^{(m,n)}(u) := \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2\alpha_j}{x_j} u_{x_j} = 0 \tag{1}$$

in the region $R_m^{n+} = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0\}$, where $x = (x_1, ..., x_m)\,, m \geq 2$,
$0 < n \leq m$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)\,, \alpha_j$ are real numbers with $0 < 2\alpha_j < 1, j = \overline{1, n}$.

Fundamental solutions of the equation (1) were constructed recently [1]. In fact, the fundamental solutions of the equation (1) can be expressed in terms of Lauricella's hypergeometric function in n variables, defined by

$$F_A^{(n)}(a, b_1, ..., b_n; c_1, ..., c_n; z_1, ..., z_n) := F_A^{(n)}\left[\begin{matrix} a, b_1, ..., b_n \\ c_1, ..., c_n \end{matrix}\; z_1, ..., z_n\right]$$

$$= \sum_{p_1,...,p_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{p_1+...+p_n}(b_1)_{p_1} ... (b_n)_{p_n}}{(c_1)_{p_1} ... (c_n)_{p_n}} \frac{z_1^{p_1}}{p_1!} ... \frac{z_n^{p_n}}{p_n!}, \quad \sum_{i=1}^{n} |z_i| < 1, \tag{2}$$

where $c_i \neq 0, -1, -2, ...,\ i = \overline{1, n}$ and $(\kappa)_\nu$ denotes the general Pochhammer symbol.

Thus, we obtain the following fundamental solutions:

$$q_k(x, \xi) = \gamma_k \prod_{i=1}^{k} (x_i \xi_i)^{1-2\alpha_i} \cdot r^{-2\beta_k} F_A^{(n)}\left[\begin{matrix} \beta_k, 1-\alpha_1, ..., 1-\alpha_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n; \\ 2-2\alpha_1, ..., 2-2\alpha_k, 2\alpha_{k+1}, ..., 2\alpha_n; \end{matrix}\; \sigma_1, ..., \sigma_n\right], \tag{3}$$

where

$$\beta_k = \frac{m}{2} + k - 1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i,$$

$$\gamma_k = 2^{2\beta_k - m} \frac{\Gamma(\beta_k)}{\pi^{m/2}} \prod_{i=k+1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(2\alpha_i)} \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(1-\alpha_j)}{\Gamma(2-2\alpha_j)}, \quad k = \overline{0, n};$$

$$\sigma_k = 1 - \frac{r_k^2}{r^2}, \quad r^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \xi_i)^2, \quad r_k^2 = (x_k + \xi_k)^2 + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} (x_i - \xi_i)^2, k = \overline{1, n}.$$

For a given multiple hypergeometric function, it is useful to fund a decomposition formula which would express the multivariable hypergeometric function in terms of products of several simpler hypergeometric functions involving fewer variables. For example, the hypergeometric Lauricella function $F_A^{(n)}$, defined by formula (2) has the decomposition formula [2]

$$F_A^{(n)} (a, b_1, ..., b_n; c_1, ..., c_n; z_1, ..., z_n)$$

$$= \sum_{m_2,...,m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_2+...+m_n} (b_1)_{m_2+...+m_n} (b_2)_{m_2} \cdots (b_n)_{m_n}}{m_2!...m_n! (c_1)_{m_2+...+m_n} (c_2)_{m_2} \cdots (c_n)_{m_n}} z_1^{m_2+...+m_n} z_2^{m_2} ... z_n^{m_n}$$

$$\cdot F (a + m_2 + ... + m_n, b_1 + m_2 + ... + m_n; c_1 + m_2 + ... + m_n; z_1)$$

$$\cdot F_A^{(n-1)} \left[\begin{matrix} a + m_2 + ... + m_n, b_2 + m_2, ..., b_n + m_n; \\ c_2 + m_2, ..., c_n + m_n; \end{matrix} z_2, ..., z_n \right], n \in \mathrm{N} \backslash \{1\}. \quad (4)$$

However, due to the recurrence of formula (4), additional difficulties may arise in the applications of this expansion. Further study of the properties of the hypergeometric Lauricella function $F_A^{(n)}$ showed that formula (4) can be reduced to a more convenient form.

Lemma. *The following decomposition formula holds true at* $n \in \mathrm{N} \backslash \{1\}$

$$F_A^{(n)} (a, b_1, b_2, ..., b_n; c_1, c_2, ..., c_n; z_1, ..., z_n)$$

$$= \sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2\leq i\leq j\leq n)}}^{\infty} \frac{(a)_{A(n,n)}}{m_{ij}!} \prod_{k=1}^{n} \frac{(b_k)_{B(k,n)}}{(c_k)_{B(k,n)}} z_k^{B(k,n)} F \left[\begin{matrix} a + A(k, n), b_k + B(k, n); \\ c_k + B(k, n); \end{matrix} z_k \right], \quad (5)$$

where

$$A(k, n) = \sum_{i=2}^{k+1} \sum_{j=i}^{n} m_{i,j}, \;\; B(k, n) = \sum_{i=2}^{k} m_{i,k} + \sum_{i=k+1}^{n} m_{k+1,i}.$$

Lemma. *Let* $a, b_1, \ldots, b_n$ *are real numbers with* $a = 0, -1, -2, ...$*and* $a > b_1 + ... + b_n$. *Then the following summation formula holds true at* $n \in \mathrm{N}$

$$\sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2\leq i\leq j\leq n)}}^{\infty} \frac{(\alpha)_{A(n,n)}}{m_{ij}!} \prod_{k=1}^{n} \frac{(b_k)_{B(k,n)} (a - b_k)_{A(k,n)-B(k,n)}}{(a)_{A(k,n)}} = \Gamma \left(a - \sum_{k=1}^{n} b_k \right) \frac{\Gamma^{n-1} (a)}{\prod_{k=1}^{n} \Gamma (a - b_k)}. \quad (6)$$

The Lemmas are proved by the method mathematical induction.

Lemma. *The following equality*

$$\lim_{\substack{z_k\to 0,\\ k=1,\dots,n}} z_1^{-b_1}\dots z_n^{-b_n} F_A^{(n)}\left(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; 1-\frac{1}{z_1}, \dots, 1-\frac{1}{z_n}\right)$$
$$=\frac{1}{\Gamma(a)}\Gamma\left(a-\sum_{k=1}^{n} b_k\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(c_k)}{\Gamma(c_k-b_k)} \qquad (7)$$

is valid.

The proof of the Lemma follows from the above first two Lemmas.

Fundamental solutions, defined by (3) and equalities (5)–(7) play an important role in the study of boundary value problems for the equation (1) [3].

References

[1] Ergashev T.G. Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients. ArXiv.org.:1805.03826.

[2] Hasanov A., Srivastava H., Some decomposition formulas associated with the Lauricella function $F_A^{(r)}$ and other multiple hypergeometric functions, Applied Mathematic Letters, 19(2) (2006), 113-121.

[3] Ergashev T.G. The Dirichlet problem for elliptic equation with several singular coefficients, e-Journal of Analysis and Applied Mathematics, 2018, 1, 81-99.

A Non-local Initial Problem for Second Order Time-Fractional and Space-Singular Equation

E.Karimov[1], **M.Mamchuev**[2], **M.Ruzhansky**[3]

[1] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan.*

[2] *Department of Theoretical and Mathematical Physics, Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia.*

[3] *Ghent University, Ghent, Belgium*

We consider the equation

$$L(u) - B_\nu(u) = f(t,x) \qquad (1)$$

in a rectangular domain $D = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$, $T > 0$, where $f(t,x)$ is a given function,

$$L(u) = \partial_{0t}^{\alpha} u(t,x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial_{0t}^{\alpha_i} u(t,x) \qquad (2)$$

is the time component of the equation, with orders $0 < \alpha_i \le 1$, $\alpha_i < \alpha < 2$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, and

$$B_\nu(u) = u_{xx}(t,x) + \frac{1}{x}u_x(t,x) - \frac{\nu^2}{x^2}u(t,x) \qquad (3)$$

is the Bessel part of the equation with $\nu > 0$. Here

$$\partial_{0t}^{\beta} g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{g^{(k)}(z)}{(t-z)^{\alpha-k+1}} dz, & \alpha \notin \mathbb{N}_0, \\ \dfrac{d^k g(t)}{dt^k}, & \alpha \in \mathbb{N}, \\ g(t), & \alpha = 0, \end{cases}$$

is a fractional differential operator of Caputo type, $k = [\alpha] + 1$. We can refer to [1] for further details on the Caputo fractional derivative operators.

The non-local initial boundary problem for equation (1) is formulated as follows:

For $M \in \mathbb{R}$ find a solution $u(t,x)$ of the equation (1) in the region D, satisfying the following conditions:

(i) regularity conditions

$$u \in C(\overline{D}),\ u_{xx},\ \partial_{0t}^{\alpha} u \in C(D),\ \int_0^1 \sqrt{x}|u(t,x)|dx < +\infty;$$

(ii) boundary and non-local initial conditions

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} x u_x(t,x) = 0,\ u(t,1) = 0, \\ &u(0,x) + Mu(T,x) = 0,\ 0 \le x \le 1, \quad [\alpha] \cdot u_t(0,x) = 0,\ 0 < x < 1. \end{aligned} \tag{4}$$

The main result of this note is well-posedness. The interesting part are the conditions on f allowing one to handle the singularities in the coefficients of the Bessel operator, and the non-resonance conditions (5) relating the parameter M with the length T of the time interval, coefficients and fractional orders of time-derivatives, through the multinomial Mittag-Leffler's function.

Theorem. *Assume that*

- $f(x,t)$ *is differentiable four times with respect to* x;
- $f(0,t) = f'(0,t) = f''(0,t) = f'''(0,t) = 0,\ f(1,t) = f'(1,t) = f''(1,t) = 0$;
- $\frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x}$ *is bounded;*
- $f(x,t)$ *is continuous and continuously differentiable with respect to* t,

and non-resonance conditions

$$M \neq -\frac{1}{E_{(\alpha-\alpha_1,\alpha-\alpha_2,\ldots,\alpha),1}(\lambda_1 T^{\alpha-\alpha_1}, \ldots, \lambda_n T^{\alpha-\alpha_n}, -\gamma_k^2 T^{\alpha})} \tag{5}$$

hold for all $k = 1, 2, \ldots$.

Then there exists a unique solution of the problem (1), (4).

References

[1] A.A.Kilbas, H.M.Srivastava and J.J.Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[2] Y.Luchko, R.Gorenflo, An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives, Acta Math. Vietnam., 24 (1999), 207-233.

О разрешимости одной задачи для вырождающегося параболического уравнения смешанного типа

М.Х.Акбарова[1], Ш.Ш.Мухсинов[2]

[1,2] *Ташкентский университет информационных технологий*

В настоящей работе исследуется нелокальная краевая задача для уравнения

$$(\mathrm{sgn}x)\, u_t = xu_{xx} + \alpha(x,t)u_x \tag{1}$$

в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup S$,

$$\alpha(x,t) = \begin{cases} \alpha_1, (x,t) \in \Omega^+ \\ \alpha_2, (x,t) \in \Omega^-, \end{cases} \quad (0 < \alpha_i < 1,\ i = 1,2)$$

здесь $\Omega^+ = \{(x,t) : 0 < x < \infty, 0 < t \leq T\}$, $\Omega^- = \{(x,t) : -1 < x < 0, 0 \leq t < T\}$, $S = \{(x,t) : x = 0, 0 < t < T\}$. Положим $\Gamma_0 = \{(x,t) : 0 \leq x < \infty,\ t = 0\}$, $\Gamma_1 = \{(x,t) : -1 \leq x \leq 0,\ t = T\}$.

Пусть $x = h(t)$ – заданная функция из класса $C^1[0,T]$, причем $-1 < h(t) < 0$.

Задача. Найти регулярное в области $\Omega \backslash S$ решение $u(x,t) \in C^1(\Omega \backslash S)$ уравнения (1), непрерывное вплоть до границы области Ω и удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,t)|_{\Gamma_0} = \phi_0(x), \qquad u(x,t)|_{\Gamma_1} = \phi_1(x); \tag{2}$$

$$u(-1,t) + a(t)u(h(t),t) = \mu(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

и условию склеивания

$$\lim_{x \to +0} x^{\alpha_1} u_x = \lim_{x \to -0} (-x)^{\alpha_2} u_x, \tag{4}$$

где $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\mu(t)$, $a(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\phi_0(x)$ – ограничена в $[0,\infty)$, $\phi_1(x) \in C[-1,0] \cap C^2(-1,0)$, $\mu(t), a(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T)$, $\phi_1(-1) + a(T)u(h(T),T) = \mu(T)$.

Теорема. *Пусть $|a(t)| \leq 1$. Тогда задача (1)-(4) имеет не более одного решения.*

Литература

[1] Терсенов С.А. Введению в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, 1973. 143 с.

[2] Исамухмедов С.С., Акбарова М.Х. Нелокальная краевая задача для вырождающегося параболического уравнения смешанного типа // Тезисы докладов Международной научной конференции "Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа". Ташкент, 1993. С. 77.

О краевой задаче для смешанно-параболического уравнения

С.Х.Акбарова, М.Д.Халилов

Андижанский государственный университет

Пусть D – область, ограниченная прямыми $x = -h,\ y = Y$ при $x < 0$, $y > 0$ и $y = 0, y = Y$ при $x > 0,\ y > 0,$ здесь $h = (2q)^{1/q},\ 2q = n + 2$, $n = const > -1, Y = const > 0$.

Обозначим через

$$D_0 = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y \leq Y\}, D_1 = \{(x, y) : -1 < x < 0, 0 \leq y < Y\},$$

$$J = \{(x, y) : x = -1, 0 \leq y \leq Y\},$$

$$I_1 = \{(x, y) : 0 \leq x < \infty, y = 0\}, I_2 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, y = Y\}.$$

В бесконечной области D изучим краевая задача для смешанно-параболического уравнения вида

$$k(y)u_{xx} - (\text{sgn}x)\,\rho(x)u_y = 0, \tag{1}$$

здесь коэффициенты $k(y) = y^m,\ \rho(x) = (x\,\text{sgn}x)^n, m = const > 0$.

Заметим, что в области D_0 уравнение (1) является прямо-параболическим, а в области D_1 – обратно-параболическим [1]. Здесь нужно отметить, что в бесконечных областей исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типов в работах М.С.Салахитдинова и его учеников [2].

Задача A. Найти функцию $u(x, y)$, $u(x, y) \in C^{2,1}(D_0 \cup D_1)$, удовлетворяющую (1) в областях D_0, D_1 и обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C^1(D)$ и непрерывна вплоть до границы области D;

2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) и ограничена для всех $0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq Y$;

3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(x, y)|_{y=0} = \varphi(x), x \in I_1, \tag{2}$$

$$u(x, y)|_{y=Y} = \psi(x), y \in I_2, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{x=-1} = \chi(y), y \in J, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(y)$ – заданные функции, причем $\varphi(x)$ – ограничена в $[0,\infty)$, $\psi(x) \in C\,[-1,0] \cap C^2\,(-1,0)$, $\chi(y) \in C\,[0,Y] \cap C^2\,(0,Y), \chi(Y) = \psi(-1)$.

Единственность решения поставленной задачи следует из следующего принципа экстремума: решение $u(x,y)$ задачи А своего положительного максимума и отрицательного минимума в области $\overline{D}$ может достигать лишь на границе $I_1 \cup I_2 \cup J$.

Существование решения задачи А доказывается сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которой следует из единственности решения поставленной задачи.

Литература

[1] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир. 1968. 428 с.

[2] Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнения эллиптико-параболического типа с различными порядками вырождения // ДАН РУ, 1992. - №12, - С.3-5.

Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

Ю.П.Апаков[1], А.А.Хамитов[2]

[1]*Наманганский инженерно-строительный институт*

[2]*Наманганский государственный университет*

В области $D = \{(x,y,z): \quad 0 < x < p, \;\; 0 < y < q, \quad 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнения

$$L\,[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

где $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$ – постоянные вещественное числа.

Задача. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^{3,2,2}_{x,y,z}\,(D) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}\,(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,(x,0,z) = u\,(x,q,z) = 0, \quad u\,(x,y,0) = u\,(x,y,r) = 0, \tag{2}$$

$$u\,(0,y,z) = \psi_1\,(y,z)\,, \quad u\,(p,y,z) = \psi_2\,(y,z)\,, \quad u_x\,(p,y,z) = \psi_3\,(y,z)\,, \tag{3}$$

где $\psi_i\,(y,z)\,,\, i = \overline{1,3}$ – заданные достаточно гладкая функции.

Отметим, что для уравнения (1) при $z = 0$ рассмотрено в работах $[1,2]$, а трехмерном варианте для уравнения второго порядка – в работах.

Установливается единственность решение поставленной задачи.

Литература

[1] Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных. УзМЖ, Т.: 2007. №1. С. 14-23.

[2] Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. Т.: "Fan va texnologiya" , 2019, 156 с.

Некоторые особенности теории поверхности в Галилеевом пространстве

А.Артикбаев
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
aartykbaev@mail.ru

Теория поверхности галилеева пространства ${}^1R_3$ дано в монографии [1], где требуется от поверхности, чтобы оно не имела особых касательных плоскостей. Если поверхность F рассматривается в некоторой системе координат $Oxyz$, то плоскости $x = \text{const}$ будут особыми. Тогда векторное уравнение поверхности F задается формулой

$$\bar{r}\,(u,\ v) = u\bar{i} + y\,(u,\ v)\,\bar{j} + z\,(u,\ v)\,\bar{k}$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – базисные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно и $(u, v) \in D$.

Рассмотрим случай, когда область D принадлежит координатной плоскости xOy. В этом случае $x = u$. Если считать u-параметром, то уравнения

$$y = y\,(u,\ v)\,, \qquad z = z\,(u,\ v)$$

дают однопараметрическое семейство кривых на плоскости yOz.

Условия, что поверхность F не имеет особые касательные плоскости, в некотором смысле ограничивает произвол области D. Пусть γ – кривая ограничивающая односвязную область D и параметр $u \in [a, b]$. Тогда из требования налагаемой поверхности $F \in {}^1R_3$ следует, что прямые $x = a$ и $x = b$ не могут быть касательными к кривой γ. Но эти прямые могут быть опорными.

Эти утверждения легко доказываются геометрическими методами, но они требуют тщательного изучения с точки зрения теории дифференциальных функций.

Задача. Найти дифференциальные условия, налагаемые на поверхности, не имеющие особых касательных плоскостей в галилеевом пространстве ${}^1R_3$.

Литература

[1] Артыкбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени. Т.: Фан, 1991.

О базисах в $L_p(R^N)$ средних Рисса спектральных разложений

К.Т.Буваев
Национальный университет Узбекистана
buvayev@mail.ru

Рассмотрим однородный полином по $\xi \in R^N$ четного порядка m с вещественными коэффициентами

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha. \tag{1}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ (в мультииндексных обозначениях).

Пусть соответствующий полиному (1) дифференциальный оператор $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ является эллиптическим ($D = D^\alpha$, $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$). Далее будем предпологать, что множество $M = \{\xi \in R^N : A(\xi) < 1\}$ является выпуклым.

Оператор $A(D)$ с областью определения $C_0^\infty(R^N)$ имеет в $L_2(R^N)$ единственное самосопряженное расширение, спектральная функция которого равна

$$\Theta(x, y, \lambda) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{A(\xi)<\lambda} e^{i(x-y,\xi)} d\xi.$$

Спектральное разложение любого элемента $f \in L_2(R^N)$ определяется формулой

$$E_\lambda f(x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{A(\xi)<\lambda} \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi, \tag{2}$$

где $\hat{f}(\xi) = \int\limits_{R^N} f(x) e^{-i(x,\xi)} dx$ – преобразование Фурье функции f. Средние Рисса порядка $s \geq 0$ спектрального разложения (2) равны

$$E_\lambda^s f(x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{A(\xi)<\lambda} \left(1 - \frac{A(\xi)}{\lambda}\right)^s \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi.$$

Определение. *Будем говорить, что операторы E_λ^s образуют базис в $L_p(R^N)$, если для любой функции $f \in L_p(R^N)$ средние Рисса $E_\lambda^s f$ сходится к f в $L_p(R^N)$.*

Известно [1], что операторы E_λ^s образуют базис в $L_p(R^N)$ тогда и только тогда, когда любой функции $f \in L_p(R^N)$ выполняется неравенство

$$\|E_1^s f\|_{L_p(R^N)} \leq c\|f\|_{L_p(R^N)}, \tag{3}$$

где c-константа.

Настоящая работа посвящена изучению вопроса о базисности операторов E_λ^s в $L_p(R^N)$ при $N \geq 3$.

Теорема. *Пусть* $N \geq q3$, $1 < p < \frac{4N}{3N+1}$ *и* $s > N(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$. *Тогда операторы* E_λ^s *образуют базис в* $L_p(R^N)$.

Отметим, что в силу двойственности аналогичное утверждение справедливо при $p > \frac{4N}{N-1}$ и $s > N(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$.

В случае, когда множество M является строго выпуклым (т.е. множество $\partial M = \{\xi \in R^N : A(\xi) = 1\}$ имеет ненулевые главные кривизны во всех точках), этот результат был получен в [2]. В теореме снимается требование строгой выпуклости множества M.

Литература

[1] Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений // УМН, 1976, Т. 31, №6, С. 29-83.

[2] Ашуров Р.Р. Об условиях базисности в $L_p(R^N)$ средних Рисса спектральных разложений // Математические заметки, 1981, Т. 29, №5, С. 673-684.

О второй краевой задаче для системы уравнений типа Ходжкина-Хаксли

А.Давлатов, С.Эргашов

Андижанский машиностроительный институт

anvarjon.davlatov@mail.ru

В области $D = (0,1) \times (0,T)$ рассматривается система уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u,v,x,t), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(u,v,x,t), \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Функции f и h непрерывны, локально-липшицовы по u, v и удовлетворяют неравенству

$$|f(u,v,x,t)| + |h(u,v,x,t)| \leq C(1 + |u| + |v|)$$

в области $\vec{X} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \vec{D}$

Для нахождения решения системы (1), удовлетворяющего условиям (2-краевая задача):

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad v(x,0) = \varphi(x), \quad u_x(0,1) = \mu_0(t), \quad u_x(1,t) = \mu_1(t) \tag{2}$$

применяются тепловые потенциалы.

В результате получится система, состоящая из двух векторных уравнений Вольтерра относительно u, v и двух уравнений Фредгольма 2-рода относительно плотностей α, β тепловых потенциалов. Посредством резольвентного ядра функции $\alpha(t), \beta(t)$ выражаются через f, h и краевые условия (2). Это позволяет применить метод последовательных приближений к окончательной системы интегральный уравнений Вольтерра относительно $u(x,t), v(x,t)$.

Теорема. *Решение задачи (1), (2) существует, единственно и непрерывно завысит от начальных и граничных условий.*

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 724 с.

О разрешимости одной краевой задач и для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками

А.Х.Жураев

Наманганский инженерно-строительного институт

В области $D = \{(x,y): \ 0 < x, y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^5 U}{\partial x^5} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Будем говорить, что $U(x,y)$ регулярное решение уравнения (1), если оно удовлетворяет уравнению (1) в области D и принадлежит классу $C^{5,2}_{x,y}(D) \bigcap C^{4,1}_{x,y}(\bar{D})$.

Задача A. Найти регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x,0) = 0, \quad U_y(x,1) = 0 \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U(0,y) = \varphi_1(y), \quad U_x(0,y) = \varphi_2(y), \\ U(1,y) = \varphi_3(y), \quad U_x(1,y) = \varphi_4(y), \quad U_{xx}(1,y) = \varphi_5(y) \end{array} \right. \tag{3}$$

где $\phi_i(y) \in C^4[0,1], \quad {\varphi'}_i(0) = {\varphi_i}'(1) = {\varphi'''}_i(0) = {\varphi'''}_i(1) = 0, \quad i = \overline{1,5}.$

Теорема. *Если задача А имеет решение, то оно единственно.*

Краевая задача для уравнения смешаннаго типа высокого порядка

Б.Ю.Иргашев

Наманганский инженерно-строительный институт

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu \equiv D^{2n}_x u(x,y) + (\mathrm{sgn} y)\ D^{2n}_y u(x,y) = 0, \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l, -a < y < a\}$, где l, a – заданные положительные действительные числа, $n \in N$. Пусть $\Omega_+ = \Omega \bigcap (y > 0)$, $\Omega_- = \Omega \bigcap (y < 0)$.

Задача. Найти в области Ω функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^{2n-1}\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{2n}\left(\Omega_+ \bigcup \Omega_-\right), \quad Lu(x,y) \equiv 0, \ (x,y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \qquad (2)$$

$$D_x^{2s} u(0,y) = D_x^{2s} u(l,y) = 0, \ -a \le y \le a, \qquad (3)$$

$$D_y^{s} u(x,-a) = \varphi_s(x), \ 0 \le x \le l, \qquad (4)$$

$$D_y^{s} u(x,a) = \psi_s(x), \ 0 \le x \le l, \qquad (5)$$

где $s = 0, ..., n-1$, $\varphi_s(x), \psi_s(x)$ – заданные достаточно гладкие функции и выполняются естественные условия согласования.

При $n = 1$ уравнение (1) есть известное уравнение Лаврентьева-Бицадзе, для которого некорректность задачи Дирихле было показано в [1]. Отметим, что в а [2] имеется обширная литература по данной тематике.

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий:*

1) Пусть $n = 4m$, $m \in N$, далее либо $\frac{a}{l} \in N$, либо $\frac{a}{l} = \frac{s}{t}$ $\left(\frac{a}{l} \notin N\right)$, $s, t \in N$, $(s,t) = 1$, $(t,2) = 1$;

2) Пусть $n = 4m+1$, или $n = 4m+3$, далее $\frac{a}{l} \in N$, либо $\frac{a}{l} = \frac{s}{t}$ $\left(\frac{a}{l} \notin N\right)$, $s, t \in N$, $(s,t) = 1$, $(t,4) = 1$.

Тогда при некоторых ограничениях на граничные функции, задача (1)-(5) разрешима в классическом смысле.

Теорема 2. *Пусть $\tau = \frac{a}{l} > 0$ является иррациональным алгебраическим числом степени $p \ge 2$, Тогда при некоторых ограничениях на граничные функции, задача разрешима в классическом смысле.*

Литература

[1] Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122. №2. С. 167-170.

[2] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными // Киев, Наукова Думка, 1984.

Нелокальная задача для эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде

К.Т.Каримов

Ферганский государственный университет

В работе [1] А.А.Дезин исследовал уравнение

$$(d/dt\ )\,u - Au = f,\ \ 0 \le t \le a$$

при граничном условии $bu|_{t=0} - u|_{t=a} = g$. Здесь предполагается, что для $t \in [0, a]$ функция $u\,(t)$ принимает значения в комплексном банаховом пространстве B, $A:\ B \to B$ – коммутирующий с d/dt неограниченный линейный оператор с плотной областью определения и b-комплексное число, а также поясняется, что заданная условия "нелокальные"в том смысле, что задают связь между значениями неизвестной функции в различных точках границы.

В двумерных областях для вырождающихся эллиптических уравнений нелокальные задачи изучались в работах [2-4], в которых нелокальные условия имело вид: $u\,(0, y) = u\,(1, y)$ и $u_x\,(0, y) = 0$ при $y \ge 0$.

Рассмотрим трехмерное эллиптическое уравнение с двумя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x, y, z):\ x \in (0, a)\,,\ y \in (0, +\infty)\,,\ z \in (0, c)\}$, где $\beta,\ \gamma, a,\ c \in R$, причем $\beta,\ \gamma < 1/2$; а $u = u\,(x, y, z)$-неизвестная функция.

Исследуем следующую нелокальную задачу (такие задачи в настоящее время получили название "задача Дезина"):

Нелокальная задача. Найти функцию $u\,(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \cap (\{x = 0\} \cup \{x = a\})\right) \cap C^2\,(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и условиям

$$u\,(0, y, z) = u\,(a, y, z)\,,\ \ u_x\,(0, y, z) = u_x\,(a, y, z)\,,\ \ 0 \le y \le +\infty,\ 0 \le z \le c,$$

$$u\,(x, y, 0) = 0,\ \ u\,(x, y, c) = 0, 0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le +\infty,$$

$$u\,(x, 0, z) = f\,(x, z)\,, \lim_{y \to +\infty} u\,(x, y, z) = 0,\ \ 0 \le x \le a,\ \ 0 \le z \le c,$$

где $f\,(x, z)$-заданная непрерывная функция.

Теорема. *Пусть функция $f\,(x, z)$ удовлетворяет условиям*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f\,(x, z) = \lim_{x \to a} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f\,(x, z)\,,\ \ k = \overline{0, 2}, f\,(x, 0) = 0, f\,(x, c) = 0,$$

$$f_z\,(x, z) \in C\,([0, a] \times [0, c])\,, \lim_{z \to 0}\left[f_{zz}\,(x, z) + \frac{2\gamma}{z} f_z\,(x, z)\right] = 0,$$

$$\lim_{z\to c}\left[f_{zz}(x,z)+\frac{2\gamma}{z}f_z(x,z)\right]=0,\ \frac{\partial}{\partial z}\left[f_{zz}(x,z)+\frac{2\gamma}{z}f_z(x,z)\right]\in C\left([0,a]\times[0,c]\right),$$

$$\int\limits_0^c\int\limits_0^a\left|z^{-1/2-\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left\{z^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{2\gamma}f_{xxxz}(x,z)\right)\right]\right\}\right|dxdz<+\infty.$$

Тогда решение поставленной задачи существует и единственно.

Литература

[1] Дезин А.А. Операторы с первой производной по времени и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. 1967. Т. 31. №1. С. 61-86.

[2] Лернер М.Е., Репин О.А. О задачах типа задачи Франкля для некоторых эллиптических уравнений с вырождением разного рода // Дифференциальные уравнения, 1999. Т. 35. №8. С. 1087-1093.

[3] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения, 1999. Т. 35. №8. С. 1094-1100.

[4] Моисеев Е.И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения, 2001. Т. 37. №11. С. 1565-1567.

Интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка

Х.Н.Касимов, Ж.Ш.Мамаюсупов

Ферганский государственный университет

Пусть $a_i,\ b_i,\quad (i=1,2)$ – заданные действительные числа, причем $-\infty\le a_i<b_i\le\infty,\quad (i=1,2)$ и $\Omega=\left\{(x_1,x_2):a_1<x_1<b_1\,,\quad a_2<x_2<b_2\right\}.$

Как в работе [1] в ведем оператор дробного интегродифференцирование порядка (α_1,α_2):

$$D^{\alpha_1;\alpha_2}_{a_1,a_2;x_1,x_2}\varphi(x_1,x_2)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\Gamma(-\alpha_1)\Gamma(-\alpha_2)}\int\limits_{a_1}^{x_1}\int\limits_{\alpha_2}^{x_2}\frac{\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(x_1-t_1)^{\alpha_1+1}(x_2-t_2)^{\alpha_2+1}}\,, & \alpha_1<0,\ \ \alpha_2<0,\\ \varphi(x_1,x_2)\ , & \alpha_1=0,\ \ \alpha_2=0\\ \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}}D^{\alpha_1-n_1;\alpha_2-n_2}_{a_1,a_2;x_1,x_2}\varphi(x_1,x_2)\ , & \alpha_1>0,\alpha_2>0,\\ (\alpha_1\ge0,\ \alpha_2<0\ \ \alpha_1<0,\ \alpha_2\ge0)\,, & \end{array}\right.$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера [1], $n=n_1+n_2$ и

$$n_i=\left\{\begin{array}{ll}[\alpha_i]+1 & \alpha_i>0\\ 0 & \alpha_i\le0\quad i=1,2.\end{array}\right.$$

Интегральное преобразование Меллина функции $\varphi(x_1,x_2)$ при $x_1\ >$

$0,\ x_2 > 0$ определяется формулой

$$\varphi^*(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{s_1-1} t_2^{s_2-1} \varphi(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2,$$

а обратное интегральное преобразование Меллина осуществляется с помощью равенства

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} \varphi^*(s_1, s_2)\, x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2, \quad \gamma_i = \operatorname{Re} s_i,\ i = 1, 2$$

Если знаком $\leftrightarrow$ обозначить соответствие между функцией и ее интегральным преобразованием Меллина, то легко установить формулы:

$$\varphi(k_1 x_1, k_2 x_2) \leftrightarrow k_1^{-s_1} k_2^{-s_2} \varphi^*(s_1, s_2), \quad x_1^{k_1} x_2^{k_2} \varphi(x_1, x_2) \leftrightarrow \varphi^*(s_1 + k_1, s_2 + k_2),$$

$$\varphi(x_1^{p_1}, x_2^{p_2}) \leftrightarrow |p_1|^{-1} |p_2|^{-1} \varphi^*\left(\frac{s_1}{p_1}, \frac{s_2}{p_2}\right), \quad p_i \neq 0, \quad {}_2 \neq 0 \quad \varphi\left(x_1^{-1}, x_2^{-1}\right) \leftrightarrow \varphi^*(-s_1, -s_2).$$

Имеет места следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_1 < 0,\ \alpha_2 < 0, x_1^{s_1-\alpha_1-1} x_2^{s_2-\alpha_2-1},\ \varphi(x_1, x_2) \in L_1(\Omega)$. *Тогда справедлива формула*

$$D_{a_1, a_2; x_1, x_2}^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi(x_1, x_2) \leftrightarrow \frac{\Gamma(1 + \alpha_1 - s_1)\, \Gamma(1 + \alpha_2 - s_2)}{\Gamma(1 - s_1)\, \Gamma(1 - s_2)} \varphi^*(s_1 - \alpha_1, s_2 - \alpha_2).$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha_i < 1, \quad (i = 1, 2), \quad x_1^{s_1+\alpha_1-1} x_2^{s_2+\alpha_2-1}, \quad \varphi(x_1, x_2) \in L_1(\Omega)$. *Тогда формула (4) справедлива при* $s_1 < 1+\alpha_1,\ s_2 < 1+\alpha_2$ *и условиях* $x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \left(D_{0.0; x_1 x_2}^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi\right) = 0$ *при* $x_i = 0, \quad x_i = \infty, \quad i = 1, 2.$

Литература

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев И.О. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, mbox1987. 688 с.

Об однозначной разрешимости начально-граничной задачи для обобщенного уравнения колебаний балки в многомерном случае

Ш.Г.Касимов[1], Г.Бозорова[2]
[1,2] *Национальный университет Узбекистана*
shokiraka@mail.ru

В данной работе в области $\Pi \times (0,T)$, где $\Pi = (0,l)\times,\ldots,\times(0,l)$, а l,T – заданные положительные числа, рассматривается более общее уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(y,t) + \sum_{j=1}^{N_1} a_j^2 \frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}} + \sum_{j=N_1}^{N} b_j^2 \frac{\partial^{4s}u(y,t)}{\partial y_j^{4s}} = f(y,t), \tag{1}$$

$(y,t) \in \Pi \times (0,t)$, $p-1<\alpha\le p$, $1\le N_1<N$, $m,s,p\in\mathbb{N}$, с начальными

$$\lim_{t\to+0} D_{0t}^{\alpha-i}u(y,t) = \varphi_i(y), \;\; i=\overline{1,p} \tag{2}$$

и краевыми

$$\begin{gathered}
\left.\frac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+2}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=l}=0,\\
k=\overline{0,m-1},\ j=\overline{1,N_1};\\
\left.\frac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+2}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+3}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+3}}\right|_{y_j=l}=0,\\
k=\overline{0,\ s-1},\ j=\overline{N_1,N}
\end{gathered} \tag{3}$$

условиями. Доказана теорема существования и единственности поставленной задачи в классах Соболева. Решение рассматриваемой задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи, для которой найдены её собственные значения как корни трансцендентного уравнения и построена соответствующая система собственных функций. Показана, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций получена теорема единственности решения поставленной начально-граничной задачи.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.

[2] Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения колебаний балки // Дифференциальные уравнения. 2017. Т.: 53. №5. С. 665-671.

О поведение решений смешанной задачи для многомерного уравнения теплопроводности

Н.М.Комилов
Андижанский государственный университет

Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ уравнение теплопроводности
$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{1}$$
с начальными и граничными
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{2}$$
условиями. Решение смешанной задачи (1)-(2) ищем в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t} v_n(x)$. Тогда начальные условия перепишется в виде $u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n v_n(x) = \varphi(x)$, где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные значения, $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующие собственные функции задачи на собственные значения.
$$-\Delta v(x) = \lambda v(x) \ \text{ при } \ x \in \Omega \ \text{ и } \ v(x) = 0 \ \text{ при} x \in \partial\Omega, \tag{3}$$
φ_n – коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$ по собственным функциям $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ оператора Лапласа.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2 \lambda_n^{2\alpha + \frac{N}{2}} < \infty$ *сходится. Тогда выполняются следующая оценка* $u(x,t) = \varphi(x) + O(t^\alpha)$ *при* $t \to +0$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x)$*-кусочно-гладкая функция. Предположим, что для каждого компакта* $G \subset \Omega$ *равномерно выполнена соотношения* $u(x,t) - \varphi(x) = o(t)$ *при* $t \to +0$. *Тогда функция* $\varphi(x)$ *является гармонической функцией в области* Ω, *т.е.* $\Delta\varphi(x) = 0, \ x \in \Omega$.

Литература

[1] Alimov Sh.A. On the eigenfunction expansion of a piecewise smooth function // Journal of Fourier Analysis and Applications. Boston, 2003. Vol. 9, No 1. Pp. 67-76.

Сходимость приближенного решения одной задачи Массо-теплопереноса

А.З.Маматов, Г.Жумабоев, М.Атажанова
Ташкентский институт текстильной и лёгкой промышленности
maz54@mail.ru

Рассматривается одна краевая задача параболического типа с переменными коэффициентами для определения тепло-влажностного состояния хлопка-сырца в барабанных сушилках [1]:

$$\begin{cases} \rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda\frac{\partial T^2}{\partial x^2} - \vartheta c\rho\frac{\partial T}{\partial x} - \alpha(T - T_B(x)) + \varepsilon\,\rho\, r_{21}\frac{\partial U}{\partial \tau} \\ c_m\rho\frac{\partial U}{\partial \tau} = \lambda_m\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda_m\delta\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta(U - U_B(x)) - \vartheta c_m\rho\frac{\partial U}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

с начальными

$$T(x,0) = T_0(x), \quad U(x,0) = U_0(x) \tag{2}$$

и граничными условиями третьего рода

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad -\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_1(T - T_B), \quad \lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} = \alpha_1(T - T_C) \tag{3}$$

где T, T_B, T_C – соответственно температура хлопка сырца, сушильного агента (воздуха) и внешней среды; U, U_B – соответственно влагосодержание хлопка сырца и воздуха.

Предлагается схема приближенного решения задачи (1)-(3) методом Галеркина.

Литература

[1] Лыков А.В. Тепломассообмен справочник. М.: Энергия, 1978.

[2] Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.

Краевая задача с интегральным условием для уравнения Лапласа в круге

Ш.Т.Нишонова
Ферганский государственный университет

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$L[u] \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\right\}$ и исследуем следующую задачу:

Задача. Найти непрерывное в области $\overline{\Omega}$ решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(x,y) = k\int\limits_0^1 u(rx,ry)\,dr + f(x,y), \quad (x,y)\in\sigma, \tag{2}$$

где $\sigma = \left\{(x,y) : x^2+y^2=1\right\}$, $f(x,y)$ – заданная непрерывная функция на σ, $k = const \neq 0$.

С помощью принципа экстремума можно доказать, следующую теорему:

Теорема 1. *Если $|k| < 1$, то поставленная задача не может иметь более одного решения.*

Теорема 2. *Если $|k| < 1$, $f(x,y)\in C^2[0,2\pi]\cap C^3(0,2\pi)$, $f_0(0) = f_0(2\pi)$, $f_0'(0) = f_0'(2\pi)$, то ряд в $\overline{\Omega}$, а ряды $\nu_{\rho\rho}$ и $\nu_{\varphi\varphi}$, полученные из него дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно в области $\forall\overline{\Omega}\subset\Omega$.*

Поэтому функция $\nu(\rho,\varphi)$, определенная рядом, удовлетворяет всем условиям задачи $\{(1),(2)\}$.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 724 с.

Задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода

А.Б.Окбоев

Ферганский государственный университет

Рассмотрим уравнение

$$L_{\alpha,\lambda}(u) \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y - \lambda^2 u = 0, \qquad y<0, \tag{1}$$

в конечной односвязной области D, ограниченной характеристиками AC : $x - 2\sqrt{-y} = 0$, BC : $x + 2\sqrt{-y} = 1$ и AB : $y = 0$ уравнения (1) при $y \le 0$, где $n = 0,\ 1,\ 2, ...$ и $\alpha = 1/2 - n$, $n\in N$, а $\lambda\in R$ или $i\lambda\in R$.

В работе [1] для уравнения (1) в области D при $\alpha\neq -n$, $n = 0,\ 1,\ 2, ...$, $\alpha\neq 1/2-n$, $n\in N$ была сформулирована и исследована ряд задач со смещением. Настоящая работа является продолжением работы [1] и исследуется аналогичная задача при $n = 0,\ 1,\ 2, ...$ и $\alpha = 1/2 - n$, $n\in N$.

Задача. Найти регулярное в области D решение $u(x,y)\in C(\overline{D})$ уравнения (1) при $\alpha = 1/2 - n$, $n = 0,\ 1,\ 2, ...$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \forall x\in[0,1],$$

$$a\left(x\right)A_{0x}^{1,\lambda i}\left\{D_{0x}^{1+n}\left[u\left(\theta_0\right)\right]\right\}+b\left(x\right)A_{x1}^{1,\lambda i}\left\{D_{x1}^{1+n}\left[u\left(\theta_1\right)\right]\right\}+$$

$$+c\left(x\right)\lim_{y\to 0}\left(-y\right)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left[u-A_{1/2-n}^{-}\left(\tau,\lambda\right)\right]=f\left(x\right),\ \forall x\in\left(0,1\right),$$

где $\tau(x), a(x), b(x), f(x)$ – заданные функции,

$$\mathrm{A}_{kx}^{1,\lambda}\left[g\left(x\right)\right]=g\left(x\right)-\int\limits_{k}^{x}g\left(t\right)\tfrac{t-k}{x-k}\tfrac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{\left(x-k\right)\left(x-t\right)}\right]dt,$$

$$A_{1/2-n}^{-}\left(\tau,\lambda\right)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{C_{n+1}^{k}(4y)^{k}}{k!(-n+1/2)_k}\int\limits_0^1\Psi_k\left(\tau,\lambda\right)\left[z\left(1-z\right)\right]^k\bar{J}_k\left(\sigma\right)dz,$$

$D_{0x}^{1-\beta}$ и $D_{x1}^{1-\beta}$ – операторы дробного дифференцирования.

Теорема. *Если выполняется условие*

$$(1/4)^{n+1/2}x^n a(x)+(1/4)^{n+1/2}(1-x)^n b(x)+\left(n!\right)/2\left(2n\right)!\,c(x)\neq 0,\ \ x\in\left[0,1\right],$$

$$\tau(x)\in C^{(2n+3)}[0,1];\ \ a(x),\ \ b(x),\ \ f(x)\in C[0,1],$$

то задача имеет единственное решение.

Литература

[1] Уринов А.К., Окбоев А.Б. Краевая задача типа А.М.Нахушева для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода. Бюллетень Института математики, №4, 2018, С. 36-45.

Некоторые краевые задачи для дифференциального уравнения дробного порядка

Д.Д.Орипов

Ферганский государственный университет

Аналогично дифференциальным уравнениям целого порядка излучается задача Коши и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка [1,2].

Рассмотрим дифференциальные уравнение дробное порядка, вида

$$D_{ax}^{\alpha}y\left(x\right)-\lambda y\left(x\right)=f\left(x\right),\ \ 1<\alpha<2,\ \ x\in\left(a,b\right),\ \ \lambda\in\mathbb{R} \tag{1}$$

здесь $f\left(x\right)$ – заданная функция, $a,b\in\mathbb{R}$, $-\infty<a<b<+\infty$.

Задача 1. Найти решение $y\left(x\right)\in C_{2-\alpha}^{\alpha}\left[a,b\right]$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$a_1\lim_{x\to a}\left[\left(x-a\right)^{2-\alpha}y\left(x\right)\right]+b_1\lim_{x\to a}\left[\left(x-a\right)^{1-\alpha}y\left(x\right)\right]=k_1, \tag{2}$$

$$a_2 y(b) + b_2 y'(b) = k_2 \tag{3}$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$ – заданные дествительные числа, причем $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$,

$$C_{2-\alpha}^{\alpha}[a,b] = \left\{ y(x) \in C_{2-\alpha}[a,b] : D_{ax}^{\alpha} y(x) \in C_{2-\alpha}[a,b] \right\}.$$

Теорема 1. *Если* $f(x) \in C_\gamma[a,b]\,(0 \leqslant \gamma < 1)$, *то краевая задача* $\{(1),(2),(3)\}$ *однозначно разрешима, где*

$$C_\gamma[a,b] = \left\{ y(x) : (x-a)^\gamma y(x) \in C[a,b] \right\}.$$

Задача 2. Требуется определить решение $y(x) \in C_{2-\alpha}^{\alpha}[a,b]$ уравнение (1), удовлетворяющее условиям

$$a_1 \lim_{x\to a} \left[(x-a)^{2-\alpha} y(x) \right] + b_1 \lim_{x\to a} \left[(x-a)^{1-\alpha} y(x) \right] = k_1, \tag{4}$$

$$y(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{\alpha_n}^{\beta_n} y(x)\,dx + k_2, \tag{5}$$

где $a_1, b_1, c_n, \alpha_n, \beta_n, k_1, k_2$ – заданные дествительные числа, причем $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_n < \beta_n < b$, $n \in N$.

Теорема 2. *Если* $f(x) \in C_\gamma[a,b]\,(0 \leqslant \gamma < 1)$, *то существует единственное решение задачи* $\{(1),(4),(5)\}$.

Литература

[1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. -Москва: Физматлит, 2003.

[2] Килбас А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. -Самара: 2009.

Единственность решения второй краевой задачи для бипараболического уравнения в квадранте

Ш.А.Орипов

Ферганский государственный университет

Введем обозначения $\Omega = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$, $S = S_1 \cup S_2 \cup \{0\}$, $S_1 = \{(x,y) : x > 0,\ y = 0\}$, $S_2 = \{(x,y) : x = 0,\ y > 0\}$.

В области Ω для уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u = 0 \tag{1}$$

исследуем следующую задачу.

Задача A. В области Ω требуется найти функцию $u\left(x,y\right)\in C^{3,1}_{x,y}\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^{4,2}_{x,y}\left(\Omega\right)$, удовлетворяющую уравнению (1), начальным

$$u\left(x,0\right)=\varphi_1\left(x\right),u_y\left(x,0\right)=\varphi_2\left(x\right),0\leq x<+\infty, \tag{2}$$

и граничным

$$u_x\left(0,y\right)=\nu\left(y\right),u_{xxx}\left(0,y\right)=\theta\left(y\right),0\leq y<+\infty, \tag{3}$$

условиям, где $\varphi_1\left(x\right),\varphi_2\left(x\right),\nu\left(y\right)$ и $\theta\left(y\right)$ – заданные непрерывные функции, причем имеет место следующее условие согласования ${\varphi'}_1\left(0\right)=\nu\left(0\right)$ и $\theta\left(0\right)={\varphi'''}_1\left(0\right)$.

Теорема. *Если существует решение задачи (1)-(3), то оно единственно.*

Литература

[1] Уринов А.К. Краевые задачи для дифференциальных уравнений параболического типа. Т.: Мумтоз суз, 2015.

О разрешимости смешанной задачи для одной системы составного типа

И.Ф.Сраждинов, Ж.Д.Дехконов
Алмалыкский филиал Ташкентский государственный технический университет

Изучается вопрос о разрешимости смешанной задачи для системы составного типа

$$U_{tt}+V_{xx}=aV,V_{tt}-V_{xx}=bU \tag{1}$$

в цилиндре $\Omega=\left\{(x;t):\ 0\leq x\leq l,\quad t>0\right\}$, с краевыми условиями и начальными условиями

$$U\left(0,t\right)=V\left(0,t\right)=U\left(l,t\right)=V\left(l,t\right)=0, \tag{2}$$

$$U_t^{'}\left(x;0\right)=\varphi\left(x\right);\quad V_t^{'}\left(x;0\right)=\Psi\left(x\right), \tag{3}$$

a и b отличные от нуля заданные действительные числа.

Задача. Найти функции $U=U(x;t)$ и $V=V(x;t)$ являющиеся решением системы (1) и удовлетворяющие условиям (2) и (3).

Детальный анализ работ посвященных смешанной задаче для гиперболических и параболических уравнений а также подробное исследование таких задач проведено в [1]. Определение систем составного типа и постановку краевых задач к ним можно найти в [2].

Используя метод [1] получено решение в виде рядов.

Литуратура

[1] Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений. Успехи математических наук. Т. XV, вып. 2(92), 1960, С. 97-154.

[2] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука. 1987. 415 с.

Нелокальная задача со свободной границей для квазилинейного уравнения диффузии с нелинейным граничным условием

Р.Н.Тураев
Институт математики АН РУз имени В.И.Романовского
rasul.turaev@mail.ru

Настоящее время в современной науке наблюдается повышенный интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах, которых можно указать задачи гидро – и газодинамики, физики плазмы, теории химических реакций и др [1,2].

В связи с постановкой новых задач возникает необходимость разработки новых подходов в исследовании нелинейных задач математической физики, решающихся с помощью математических моделей процессов в нелинейных средах [1,2]. При этом многие из указанных задач приводятся к краевым задачам со свободной границей локальных и нелокальных задач для различных параболических уравнений [3,4].

В настоящей работе рассматривается нелокальная задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с нелинейными граничными условиями.

Требуется найти на некотором отрезке $0 \leq t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)$ – удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T,\ 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(u_x)u_{xx}(t,x) + bu_x^2(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi(t, u(t,0)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,0) = u(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \omega(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача сводится типа задача Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее, устанавливается априорные оценки свободной границей и решений и их производных в норм Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера [4].

Литература

[1] Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Труды Моск. Матем. общва, 1967, Т. 16, С. 329-346.

[2] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал, УРСС, 2003, 784 с.

[3] Тахиров Ж.О. Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент, 2014. 240 с.

[4] Cannon J.R., Salman M. On a class of nonlinear nonclassical parabolic equation. J.Applicable Analysis. Vol. 85, No.1-3, 2006. pp. 23-44.

Доказательство единственности обобщенного решения смещенной задачи параболического типа

М.Тухтасинов[1], Г.М.Абдуолимова[2]

[1] *Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека*

[2] *Андижанский государственный университет*

mumin51@mail.ru, abduolimova81@inbox.ru

В данной работе рассмотрена третья краевая задача параболического уравнения второго порядка. После записи уравнения в виде интеграла вводятся понятия обобщенного решения, единственность которого доказывается обобщением соответствующей идеи из книги [1].

Рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f\left(x,t\right), x \in \Omega, t > 0, \tag{1}$$

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), x \in \Omega, \tag{2}$$

$$Pu = \mu\left(x,t\right), x \in \partial\Omega, t \geq 0, \tag{3}$$

где $f\left(x,t\right), u_0\left(x\right)$ и $\mu\left(x,t\right)$ заданные функции, а операторы L, P определены следующим образом: $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a\left(x\right)u,\ x \in \Omega$, $Pu = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\left(n,x_j\right) + h\left(x\right)u,\quad x \in \partial\Omega$ причем первый оператор положительно определенный. В пространстве $R^{(n+1)}$ обозначим цилиндр $Q_T = \left\{(x,t) : x \in \Omega,\ 0 < t < T\right\}$, здесь T – высота цилиндра.

Пусть $u(x,t)$ классическое решение задачи (1)-(3), существование которого установлено каким-либо способом при соответствующих предположениях относительно всех данных задачи. Тогда имеем

$$\int_0^\tau \int_\Omega v \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu - f(x,t) \right) dxdt = 0, \tau \geq 0, \tag{4}$$

для любой функции $v(x,t)$ с условием $v|_{t=T} = 0$.

Интегрированием по частям из (4) имеем

$$\int_\Omega v(x,\tau)\, u(x,\tau)\, dx + \int_0^\tau \int_\Omega \left(-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x)\, uv \right) dxdt+$$
$$+\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} h(x)\, uvdSdt = \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \mu v dxdt + \int_\Omega u_0(x)\, v(x,0)\, dx + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} fvdxdt. \tag{5}$$

Определение. Обобщенным решением начально – краевой задачи (1)-(3) называется функция $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Omega \times (0,T))$ удовлетворяющая тождеству (5) при любых $v(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega \times (0,T))$ и $0 < \tau < T$.

Теорема. *Начально-краевая задача (1)-(3) не может иметь более одного обобщенного решения.*

Литература

[1] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М:. Наука, 1976.

Краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике

А.К.Уринов, М.С.Азизов
Ферганский государственный университет

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения

$$Lu \equiv u_{xxxx} + u_{tt} + \frac{2\gamma}{t} u_t = f(x,t), \quad 0 < \gamma < 1/2\ . \tag{1}$$

Задача A_1. Найти в области Ω регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq p; \qquad u(x,T) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < p$$

$$u_x(0,t) = 0, \ \ u_x(p,t) = 0, \ \ u_{xxx}(0,t) = 0, \ \ u_{xxx}(p,t) = 0, \ \ 0 \leq t \leq T,$$

где $f(x,t)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные функции.

Теорема 1. *Пусть числа p и T такие, что для $\forall \ \ n=1,2...$*

$$J_{1/2\,-\gamma}\left((n\pi/p\ )^2 T\right)\neq 0,$$

где $J_w\left(z\right)$ – функция Бесселя первого рода порядка w [1]. Если существует регулярное решение задачи A_1, то оно единственно.

Теорема 2. *Если $f\left(x,t\right)\ \in\ C^{4,0}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right),\ f_{xxxxx}\left(x,t\right)\ \in\ C\left(\Omega\right)\cap L_2\left(\Omega\right),$ $f_x\left(0,t\right)=f_x\left(p,t\right)=0,\ f_{xxx}\left(0,t\right)=f_{xxx}\left(p,t\right)=0$ и $\varphi_1\left(x\right),\ \varphi_2\left(x\right)\in C^4\left[0,p\right],$ $\varphi^{(5)}_1\left(x\right),\ \varphi^{(5)}_2\left(x\right)\in C\left(0,p\right)\cap L_2\left(0,p\right),\ {\varphi_1}'\left(0\right)={\varphi_1}'\left(p\right)=0,\ {\varphi_2}'\left(0\right)={\varphi_2}'\left(p\right)=0,\ {\varphi'''}_2\left(0\right)={\varphi'''}_2\left(p\right)=0,$ то регулярное решение задачи A_1 существует.*

Литература

[1] Ватсон Ж.Н. Теория бесселевых функций. Том. 1. М.: Изд. ИЛ, 1949. 798 с.

Модифицированная задача Коши для одного гиперболического уравнения второго рода

Ш.Фармонов

Ферганский государственный университет

Пусть Ω – конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная отрезками $\overline{OA}=\{(x,y):y=0,\ 0\leq x\leq 1\}$, $\overline{OB}=\left\{(x,y):x+y=0,\ 0\leq x\leq \frac{1}{4}\right\}$ и дугой $BA=\left\{(x,y):\sqrt{x}+\sqrt{-y}=1,\ y<0,\ \frac{1}{4}<x<1\right\}$. В области Ω рассмотрим уравнение

$$x\,u_{xx}+y\,u_{yy}+\left(-n+1/2\ \right)\,u_x+\ \left(-n+1/2\ \right)\,u_y=0,\quad n=0,1,2,...\,. \tag{1}$$

Отметим, что уравнение (1) принадлежит гиперболическому типу, причем отрезок OA характеристикой уравнения (1), которая к тему же является линией вырождения типа. Решении следующая задача:
найти функцию $u\left(x,y\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и начальным условиям

$$\begin{aligned}&u\left(x,0\right)=\tau\left(x\right),\quad 0\leq x\leq 1;\\ &\lim_{y\to -0}\left(-y\right)^{-n+1/2}\ \left[u-A\left(\tau\right)\right]'_y=\nu\left(x\right),\quad 0<x<1,\end{aligned} \tag{2}$$

где $\tau\left(x\right)$ и $\nu\left(x\right)$ – заданные функции,

$$A\left(\tau\right)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(-xy)^{k/2}\ \left[\tau^{(k)}\left(x-y-2\sqrt{-xy}\right)+\left(-1\right)^k\tau^{(k)}\left(x-y+2\sqrt{-xy}\right)\right],$$

здесь $P_{n,k}=2^{2k-1}n!\ (2n-k)!/[(2n)!\ k!\ \ (n-k)!]$.

Задача решается методом сведения к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу [1, 2].

Литература

[1] Крикунов Ю.М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Учебное пособие. Казань: Издательство Казанского университета. 1986. 148 с.

[2] Хайруллин Р.С. К теории уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Изв. вузов. Казань, 1993. №11(378). С. 69-76.

О задаче Коши для уравнения Лапласа

А.Б.Хасанов, Ф.Р.Турсунов

Самаркандский государственный университет

Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ точки двумерного Евклидового пространства R^2, G ограниченная односвязная область в R^2 с границей ∂G, состоящей из компактной части $T = \{y_1 \in R: \ a_1 \leq y_1 \leq b_1\}$ и гладкой дуги кривой $S: y_2 = h(y_1)$ лежащей в полуплоскости $y_2 > 0$. $\overline{G} = G \cup \partial G, \quad \partial G = S \cup T$, d/dn – оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

Решение задачи Коши будем строить в области G, когда данные Коши заданы на части границы S.

В области G рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} = 0. \tag{1}$$

Требуется найти гармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е

$$U(y)|_S = f(y), \quad \left.\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|_S = g(y). \tag{2}$$

Здесь $f(y)$и $g(y)$ заданные функции класса $C(S)$ и $C^1(S)$ соответственно.

Рассматриваемая задача (1)-(2) относится к некорректным задачам математической физики. В работе А. Н. Тихонова [4], выяснено истинную природу некорректных задач математической физики. Он указал практическую важность неустойчивых задач и показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения, т.е. задача становится устойчивой.

Отметим, что при решении прикладных задач следует найти приближенные значения решения $U(x)$ и $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$, $x \in G, \ i = 1, 2$. В данной работе строится семейство функций $U(x, \sigma, f_\delta, g_\delta) = U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_\delta,g_\delta)}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$ зависящих от параметра σ и доказывается, что при специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$ при $\delta \to 0$ сходится в каждой точке $x \in G$ к решению $U(x)$ и его производную $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ соответственно. Семейство функций $U(x, \sigma, f_\delta, g_\delta)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_\delta,g_\delta)}{\partial x_i}$ с указанными свойствами, называется регуляризованным решением по М.М. Лаврентьеву [6].

Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданным уклонением в равномерной метрике, то предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части T границы.

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на T, когда полюс фундаментального решения лежит в полуплоскости $y_2 > 0$.

Пусть $\sigma > 0$, $y' = (y_1, 0)$, $x' = (x_1, 0)$, $r = |y - x|$, $\alpha = |y' - x'|$, $\alpha^2 = s$, $w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2$, $u \geq 0$. Определим при $\alpha > 0$ функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ следующим равенствам:

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty Im \left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2} \right] \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2. \tag{3}$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x, y)$ имеем

$$\begin{gathered} \Phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2} udu}{u^2 + r^2} - \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} (y_2 - x_2) \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right]. \end{gathered} \tag{4}$$

Обозначим

$$\varphi_\sigma(x, y, u) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - \frac{(y_2 - x_2) \sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_2.$$

Тогда $\Phi_\sigma(x, y)$ принимает вид:

$$2\pi e^{\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(x, y, u)}{u^2 + r^2} u e^{-\sigma u^2} du.$$

В работе [9] доказано, что функция определенная равенствами (3) при $\sigma > 0$ представима в виде

$$\Phi_\sigma(x,y) = F(r) + G_\sigma(x,y) \tag{5}$$

где $F(r) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$, $G_\sigma(x,y)$ – функция гармоническая по y в R^2 включая $y = x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$ для любого $\sigma > 0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x,y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [6]. Поэтому для функция $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ и любого $x \in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина:

$$U(x) = \int_{\partial G}\left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x,y) - U(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right] dS_y. \tag{6}$$

Обозначим

$$U_\sigma(x) = \int_{S}\left[g(y)\Phi_\sigma(x,y) - f(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right] dS_y. \tag{7}$$

Пусть функция $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ на S удовлетворяет условие (2) и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| + \left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right| \le M, \quad y \in T, \tag{8}$$

здесь $M > 0$. При $\sigma > 0$ получены оценки для разностей $|U(x) - U_\sigma(x)|$ и $\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|$.

Литература

[1] Л.А.Айзенберг. *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск*, «Наука»,1990. 247с.

[2] Carlemah T. *Les Functions quasi analytiques*, Paris: 1926. 116p,

[3] Голузин Г. М., Крылов. В. И. *Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций*// Мат. сборник, 1933, Т.40, С. 144-149.

[4] Тихонов А. Н. *Об устойчивости обратных задач.* //ДАН СССР, Т.39, № 5, 1943, С. 195-198.

[5] Н.Н. Тарханов. *Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и некоторых его приложениях. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа.* Красноярск,1980, С. 147- 160.

[6] М.М. Лаврентьев. *О Задача Коши для уравнения Лапласа.* //Изв. АН СССР Сер. матем. 1956. Том 20, выпуск 6, С. 819-842.

Applied Mathematics and Mathematical Modelling
Прикладная математика и математическое моделирование

Confidence Intervals for Concentration Parameter in Von Mises Distribution for Circular Data

Abdul Ghapor Hussin
National Defence University of Malaysia

Directional statistics is a branch of statistics which deal with the data in angle form in which the method of analysis is different from linear data. For example, the distribution analogues to the normal distribution in linear data is known as circular normal distribution. This study focuses on the efficient approximation for the concentration parameter in von Mises distribution and its confidence interval. A new method of approximating the concentration parameter is proposed, and the performance of the proposed method is studied via simulation study. Several methods in constructing the confidence interval (CI) for the concentration parameter are proposed including CI based on circular population, CI based on the asymptotic distribution of concentration parameter, CI based on the distribution of mean resultant length and also CI based on bootstrap-t method. All proposed methods are validated via simulation study and the performance indicator such as an expected length and its coverage probability are evaluated.

The Progressive Susceptible-Infected-Detected-Removed Model of Internet Worm Propagation

F.T.Adilova, U.U.Jamilov
Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
fatadilova@gmail.com, jamilovu@yandex.com

In recent years, the worms and their ability to infect has increased a lot. In order to know them we have to look into their propagation patterns. An accurate model with proper analysis can help us to comprehensively study how a worm propagates under various conditions. Computer worms look similar to biological viruses in their propagation behaviors and self-replication. Thus, the mathematical models developed for the study of biological infectious diseases can be adapted to the study of computer worm propagation. Many attempts have been made in this domain to model the worm propagation behavior, such as PSIRD. In this paper we develop the discrete time dynamical system of network worm propagation, presented in quadratic stochastic operators (QSO) form of PSIRD models. This approach simultaneously solves two important problems: (i) exploring of the QSO trajectory's behavior, we described the set of limit points, thereby completely solved the main problem of worm propagation modelling, (ii) we show a new application of the theory QSOs. Thus proposed biologically-inspired model represents a more realistic picture of the worm propagation process, compared to the existing state-of-the-art analytical models.

The Progressive Susceptible-Infected-Detected-Removed (PSIDR) model: In the PSIDR model, it is assumed that epidemic events are divided into two periods.

The pre-response period. Initially, the worm infects one host on the network. For several days (hours), the worm spreads over the network without being noticed by most users. In terms of the PSIDR model, this phase is characterized by a positive infection rate (worm birth) β without cure attempts. Vulnerable nodes become infected with a probability of β if they are in contact with an infected node.

The response period. After a period of time, the worm is detected on some hosts. Its signatures are highlighted and entered into the anti-virus software database. Uninfected nodes become immune to this worm, and infected hosts are "cured" with a certain frequency, depending on the update rate of the anti-virus database. This period in the model under consideration is characterized by the same frequency of birth of the worm, but vulnerable nodes are cured with the frequency μ, and already infected nodes are detected with the frequency μ and cured with the frequency δ. The parameter μ essentially characterizes the speed at which the update of the anti-virus database spreads after the initial detection of the worm.

Thus, the PSIDR model assumes that the epidemic can be divided into two periods and it is assumed that the number of nodes in the network N is constant. When $0 < t < \pi$ it is must be $S(t) + I(t) = N$. The system is described by the following equations.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I, \quad \frac{dI}{dt} = \beta S I. \tag{1}$$

When $t \geq \pi$ it is must be $S(t) + I(t) + D(t) + R(t) = N$. The system is described by the following equations:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I - \mu S, \quad \frac{dI}{dt} = \beta S I - \mu I, \quad \frac{dD}{dt} = \mu I - \delta D, \quad \frac{dR}{dt} = \delta D + \mu S. \tag{2}$$

Note that in [1] the continuous time dynamical systems generated by operator (1), (2) studied in details. We consider the discrete time versions of PSIRD models generated by a quadratic stochastic operators acting in the three-dimensional simplex into itself.

References

[1] V.M. Barashkov, N.A. Zadorina, Analysis of two-stage mathematical models of computer distribution viruses, Actual problems of technical sciences in Russia and abroad.(2018) http://izron.ru (in Russian).

On Mathematical Models Described by the Nonlinear Parabolic Equation with Variable Density and Absorption

M.Aripov, A.Mukimov, Meshal Alanezi
National university of Uzbekistan
mirsaidaripov@mail.ru

Many processes in applied sciences are modeled by means of nonlinear ordinary equations, partial differential equations or systems of such equations. When suitable additional conditions are given – usually initial and boundary conditions – we deal with correctly posed problems. Many of the most important models in science, in practice, are generally described by nonlinear equations and partial differential systems. These equations have properties that are absent in linear theory and therefore make them quite difficult to solve and analyze. In addition, these nonlinear properties are often associated with essential features of real-world phenomena; linear approximation is only a first-step procedure to prepare for more realistic nonlinear analysis.

Nonlinear mathematical models are source of new phenomena and this motivated the introduction of new methods in the fields of mathematical analysis, partial differential equations and other disciplines, becoming the most active area of mathematical research since the last century. One of the most remarkable properties that distinguish nonlinear problems from linear ones is the possibility of singularities arising, even in the presence of perfectly smooth data, or more precisely, in a data class for which the theory of existence, uniqueness, and continuous dependence can be established in small time intervals, the so-called problems with well-posed in small.

Consider in the domain $Q_T = \left\{(t,x) : 0 < t < T,\ x \in R^N\right\}$ problem Cauchy for double nonlinear equation (DNLE)

$$|x|^{-l}\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\left(|x|^n\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u^l\right) + \varepsilon\gamma(t)|x|^{-l}u^q,$$
$$\varepsilon = \pm 1, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in R^N \qquad (1)$$

where $m \geq 1,\ p \geq 2,\ k \geq 1, n, q$ are given numerical parameters.

The motivation for considering such equation is that it is a degenerate partial differential equation and therefore is a source for the emergence of new nonlinear effects such as finite velocity propagation of perturbation, a spatial localization of bounded and unbounded solutions to the emergence of which were first established in the works [1] for the particular value of the numerical parameters when $l = 0$, $q = 0$, $k = 1$, $p = 2$.

Equation (1) in the case p=2 is called porous media equation to which is devoted to a huge number of works (see for example [2]) and references therein).

In the case when $k = 1$, $m = 1$ is called the p-Laplacian equations] and the literature therein). In the case $k = m$ it called $L_p(u^m)$ Laplace equation. The equation (1) in the case $k(p-2)+m-1 > 0$ is called slowly diffusion and when $k(p-2)+m-1 < 0$ it called the fast diffusion equation. Case is critical and $k(p-2)+m-1 = 0$, $l = 2$ we call a double critical case.

In this talk the qualitative properties of solution of the problem (1) depending on value of numerical parameters and initial data are considered. Estimates of a weak solution for the slowly diffusion, the fast diffusion, the critical and double critical cases, asymptotic of self-similar solutions, the numerical aspects considered problem are discussed.

References

[1] Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurduomov S.P., Mikhajlov A.P. Blowe-up in quasilinear parabolic equations. Walter de Grueter, 1995, p. 535.

[2] Vazquez J.L. "The porous medium equation. Mathematical theory". Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2007, 430 p.

[3] Pan Zheng, Chunlai Mu. Global existence, large time behavior, and life span for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and source. Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik 2013.

[4] Chunlai Mu, Pan Zheng, and Dengming Liu, localization of solutions to a doubly degenerate parabolic equation with a strongly nonlinear source Commun. Contemp. Math. 2012, 14, 1250018 [18 pages] doi:10.1142/s0219199712500186.

[5] Martynenko A.V. and Tedeev A.F. On the behavior of solutions to the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and a source, Comput. Math. Math. Phys. 48 (2008), No. 7, 1145-1160.

[6] Aripov M., Sadullaeva Sh.A. To Properties of Solutions to Reaction-diffusion Equation with Double Nonlinearity with Distributed Parameters, Journal Sib. Fed. Univ. Math. Phys., Volume 6(2), 2013, p. 157-167.

Reliability and Accuracy of NX16 3D Body Scanner

Asma Ahmad Shariff[1], **Suhana Japar**[2]
[1] *Mathematics Division, Centre for Foundation in Sciences, University of Malaya, Kuala Lumpur, Malaysia*
[2] *University of Malaya, Kuala Lumpur, Malaysia*

1. Introduction. Minimizing measurement error is of utmost importance to both manual and 3D anthropometry approaches. Anthropometric data are commonly collected manually using callipers and measuring tapes (traditional anthropometry), providing information on the static dimensions of the body in a standard position. This kind of measurement may be impractical because the observer needs to be carefully trained, the results may vary in accordance with the observer's skill level and measurement protocol, and the procedure may take longer. In contrast, when using 3D body scanning, raw data acquisition is rapid (in seconds) (Zancarano et al., 2015). An automated 3D body scanner could potentially enhance the reliability of these anthropometric measurements since the reproducibility of manual measurements of waist and hip circumferences has been questioned (Medina-Inojosa et al., 2016).

2. Material and Methods. A pilot study was conducted among 30 participants to obtain their waist and hip circumference using manual and automated measurement. Each participant was subsequently scanned and manually measured twice. There were two ways in which reliability was determined. The first was via analysis using the Intraclass Correlation Coefficient (ICC). Correlation coefficient was used to demonstrate the strength of the relationship between two repeated measurements. The range values for reliability coefficient start from 0 to 1. A coefficient of below 0 shows "no reliability", while >0 to <0.2 is slight reliability, 0.2 to <0.4 is fair reliability, 0.4 to <0.6 is moderate, 0.6 to <0.8 is substantial and 0.8 to 1.0 is almost perfect reliability (Jamaiyah et al., 2010). The second method was using the Bland Altman plot to provide an illustration of the spread of differences in readings, the mean difference, and the upper and lower limit of agreement for intra-observer reliability. In Bland-Altman plots, there is no such 'acceptable' range (Jamaiyah et al., 2010). The technical error of measurement (TEM), which is an accuracy index, was also calculated to determine the error margin in anthropometry. The TEM index allows anthropometrists to verify the accuracy degree when performing and repeating anthropometrical measurements. Relative TEM using $<1.5\%$ as the acceptable ranges for beginner anthropometrist levels for an intra-examiner is (Jamaiyah et al. 2010). TEM was calculated using following formula:

$$\mathrm{TEM} = \frac{\sum D^2}{2N}$$

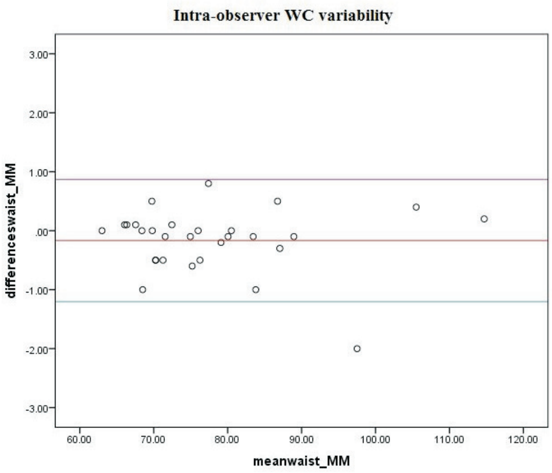
D=difference between the 1st and 2nd measurements, N=number of participants.

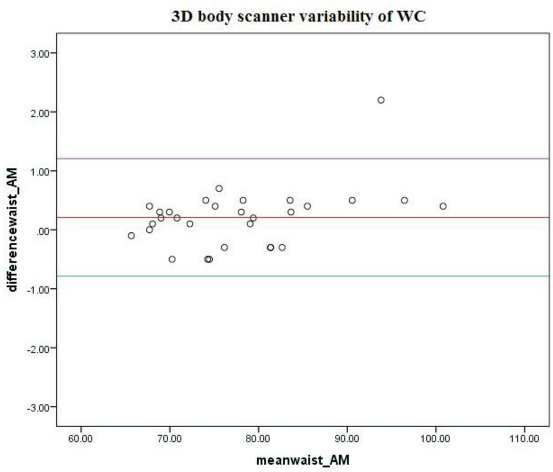
3. Results. The results of correlation coefficient of intra-observer analysis using ICC are 0.970 for WC and HC was 0.980, which means a strong correlation between two repeated measurement of WC and HC that obtained through 3D body scanner. This indicates a high degree of reliability between the measurements. For visual inspection of WC measurement using the 3D body scanner, Figure 4.1 shows that the average mean differences across all values of reading were 0.21 cm with upper limit of +1.2cm and lower limit of -0.8cm. For WC taken using MM, the average mean value is 0.17 with upper limit +0.9 and lower limit -1.2cm. For HC, the average was -0.0067 cm, with an upper limit of +0.9 cm and lower limit of -0.9 cm. In contrast, HC taken using MM shows more variation, in which the average mean was 0.07, the upper limit was +1.4cm, and the lower limit was -1.3cm.

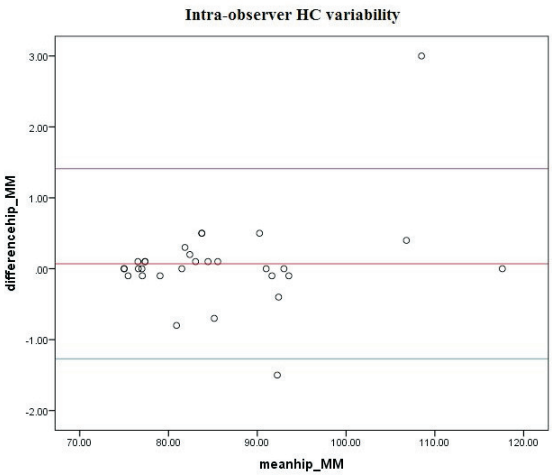
The Bland-Altman plot (Figure 1) also shows a high agreement for intra-observer of each measurement in which all values in the diagram were within upper and lower boundaries. It can clearly be seen that both Bland-Altman plots for waist and hip circumference in automated measurement showed less deviation from the average mean value. The points were scattered close to zero, which was consistent with ICC analysis of almost perfect agreement. As a summary, based on the repeated measurement of WC and HC, all ICC values were >0.97 which indicates strong reliability. The ICC value suggests that the NX16 3D body scanner has relatively high internal consistency and thus represents a reliable tool for assessing human body dimensions.

The results for TEM are tabulated in Table 1. For automated measurement, the relative TEMs for intra-observer for WC and HC were 0.2% and 0.1%, respectively. As for manual measurement, the relative TEMs value of WC and HC were slightly similar for WC while HC slightly higher. Further analysis was conducted to determine the precision of the 3D body scanner compared to manual measurement. The CV is calculated to further determine the precision of both of the measurements methods. Variability of readings were minimal for automated measurement. Percentages of CV for automated measurement of WC and HC are 0.12% and 0.09%, respectively, indicating good precision. For manual measurements of WC and HC at 0.18% and 0.12%, respectively (See Table 1). AM produced slightly less value compared to MM, indicating the higher accuracy of the 3D body scanner in extracting measurement.

Figure 1: Bland-Altman Plots illustrating WC and HC as measured manually versus using the 3D-scanner for the entire participants studied. Notes: AM represent automated measurement; MM, manual measurement; WC, waist circumference and HC, hip circumference.







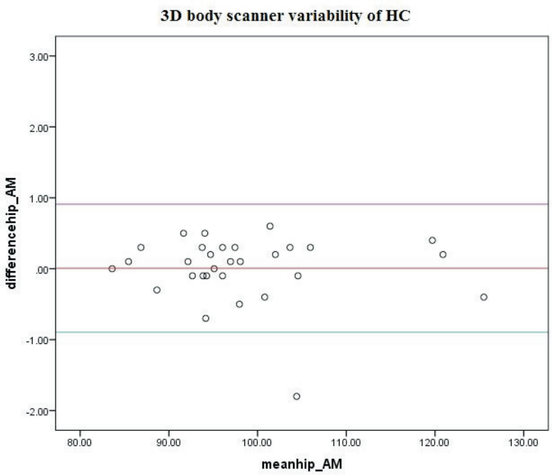


Table 1: Relative TEM classification results and Percentage of Coefficient of Variation for WC and HC measurements.

Type of measurements		TEM	%TEM	CV(%)
Waist Circumference	Automated Measurement	0.148	0.2	0.12
	Manual Measurement	0.150	0.2	0.18
Hip Circumference	Automated Measurement	0.103	0.1	0.09
	Manual Measurement	0.228	0.3	0.12

References

[1] Jamaiyah, H., Geeta, A., Safiza, M.N., Khor, G.L, Wong, N.F., Kee, C.C., Adam, B. (2010). Reliability, Technical Error of Measurements and Validity of Length and Weight Measurements for Children Under Two Years Old in Malaysia. The Medical journal of Malaysia.

[2] Medina-Inojosa, J., Somers, V.K., Ngwa, T., Hinshaw, L., Lopez-Jimenez, F. (2016).Reliability of a 3D Body Scanner for Anthropometric Measurements of Central Obesity. Obesity, 2(3).

[3] Zancanaro, C., Lovato, C., Sandri, M., Giachetti, A. (2015). Reliability of Three-dimensional Photonic Scanner Anthropometry Performed by Skilled and Na?ve Operators. International Journal of Ergonomics, 5(1), 1–11.

Standard Setting in Students Assessment of Higher Education Institution in Malaysia

Azami Zaharim[1], Nuraini Khatimin[2], and Azrilah Abd. Aziz[3]
[1]*Faculty of Engineering and Built Environment, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi Selangor, Malaysia*
[2]*Centre for Engineering Education Research, Faculty of Engineering and Built Environment, Universiti Kebangsaan Malaysia*
[3]*Faculty of Computing and Information Technology, Department of Information System, King Abdul Aziz University, Jeddah, Kingdom of Saudi Arabia*
habshahmidi@gmail.com

A standard refers to a value serves as boundaries between those who performing well enough and those who do not, in a test [1]. Meanwhile, standard setting is the process of establishing one cut score (such as pass / fail) or more cut scores (such as excellent, good, mediocre, weak) on a test, on the other word is defined levels of achievement or proficiency and the cut scores corresponding to those levels [2], [3].

There are two types of standard setting; relative (norm-referenced) and absolute (criterion-referenced). Relative standard identify the standardization based on the group results. Performance are compared between students score distribution of the whole examine group and normally use in low-stakes examinations while absolute standard emphasizes the content of the test. The standardization is based on the learning materials and use in high-stakes examination such as final examination or graduating examination.

There are various methods of standard setting in students assessment (such as Angoff, Nedelsky, Ebel, Bookmark and Objective Standard Setting) and the decision to use the method are based on the purposed of the examination. There is no perfect method to determine cut score on a test and none is agreed upon as the best method. These methods of course have advantages and disadvantages depending on their specific purpose. Different methods are recommended for different nature and test format. Even we use the same method by different group of panellists, the results of cut score also be different [6]. Norcini [1] stated that most previous studies describe that there are six (6) steps in the standard setting process using four (4) of the more popular methods. The steps are;

Step 1: decide on the type of standard

Step 2: decide on the method for standard setting
Step 3: selecting the judges
Step 4: holding the standard setting meeting
Step 5: calculating the standard
Step 6: after the test Analysis

References

[1] Norcini, J.J. (2003). Setting Standard on Educational Test. Medical Education 2003, 37: 464-469.

[2] Cizek, G.J., Bunch, M.B. (2007). What is Standard Setting. In Standard Setting: A Guide to Establishing and Evaluating Performance Standards on Tests (Chapter 2, pp. 13). SAGE Publications.

[3] Bejar, I.I. (2008). Standard Setting: What Is It? Why Is It Important? R and D Connections, 7, 1-6. Retrieved January 25, 2013, from http://www.ets.org/media/research/pdf

A Discrete Mathematical Model of the Heat Transfer Process in the Three-Layer Rotating Regenerative Air Preheater

M.A.Bekimov
[1] *Uzbekistan Academy of Science, Institute of Mathematics*
mansu@mail.ru

A rotary regenerative air preheater (RRAP) is a special device, usually aggregated to the thermal power plants in order to increase its efficiency by heating the air blowing into a boiler of the plant by means of high temperatured mixture of smoke and gas. This process is too complicated to be modeled by differential equations of classical types [1].

In [2, 3] was proposed a new approach to the mathematical modeling of the thermodynamic process in RRAP, based on the discretization of both the drum volume and its rotation, followed by averaging over spatial and temporal variables.

In [4] was proposed a two-layer mathematical model of the heat transfer process in the RRAP, which allows one to take into account mixing in a small amount of gas with air and air with gas at the interface between the gas and air parts of the drum.

In this paper, a mathematical model of a three-layer RRAP is considered. The drum of the RRAP is divided into $2m$ sectors. It is assumed that at each moment of time, $m-1$ sectors are included in the gas path and another $m-1$ sectors are in the air path, 2 sectors are disconnected and overlapped by sealing plates at the boundary of the gas and air parts of the drum RRAP. Based on the discretization method, suggested in [2-4], the model is described by the following systems of linear discrete equations:

$$z(n+1) = Az(n) + r(n),$$

where the vector $z(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_{2m}(n))^T$ – average temperature of the packings of RRAP while the vector

$$r(n) = h(\beta_1 q_1(n), \beta_2 q_2(n), \ldots, \beta_{2m} q_{2m}(n))^T,$$

(T the transpose sign) denotes temperatures of the air and gas flowing across condinitional sectors of RRAP. Rotations of the drum of RRAP yields that the matrix A is monomial. This property allows to solve problems of the asymptotic behavior of the solutions and identification. The model is convenient to investigate control problem as well.

Reference

[1] Kovalevskii V. P., "Simulation of heat and aerodynamic processes in regenerators of continuous and periodic operation. I. Nonlinear mathematical model and numerical algorithm," Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 77, No. 6, 1096–1109 (2004).

[2] Azamov A. A., Bekimov M. A., " Simplified Model of the Heat Exchange Process in Rotary Regenerative Air Pre-Heater , " Ural Mathematical Journal, Vol. 2, No. 2, 2016. pp. 27-36.

[3] Azamov A. A., Bekimov M. A., "A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters," Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 23, No. 1, 12–19 (2017).

[4] Bekimov M. A., Fathalla A. Rihan. " A Discrete Mathematical Model for Heat Transfer Process in Rotating Regenerative Air Preheater." Differential Equations and Dynamical Systems. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2018, vol. 268. Springer, Cham. pp. 55-61.

Magnetohydrodynamic Slip Flow and Heat Transfer over a Nonlinear Shrinking Surface in a Heat Generating Fluid

Leli Deswita[1], Roslinda Nazar[2], Fadzilah Md Ali[3,5], Ioan Pop[4], Mustaqim Mohamad Junoh[5]

[1]*Fakultas Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Riau, Indonesia*

[2]*School of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Technology, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia*

[3]*Department of Mathematics, Faculty of Science, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia*

[4]*Department of Mathematics, Babes-Bolyai University, R-400084 Cluj-Napoca, Romania*

[5]*Institute for Mathematical Research, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia*

fadzilahma@upm.edu.my

In this paper, the problem of steady slip magneto hydrodynamic (MHD) boundary layer flow and heat transfer over a nonlinear shrinking surface in a heat generating fluid is studied. The transformed boundary layer equations are then solved numerically using the shooting method. Numerical results are obtained for various values of the magnetic parameter, the slip parameter and the suction parameter. The skin friction coefficients, the heat transfer coefficients, the velocity and temperature profiles for various values of parameters are also obtained and discussed.

Discrete Mathematical Model of Heat Distribution in the Tube

S.B.Dustnazarov

Gulistan State University, Uzbekistan

sdustnazarov@mail.ru

Let a gas with an initial temperature of a, and velocity of v flows inside a tube having a length of L and an initial temperature of b. In this paper, discrete mathematical model of variations of gas and tube temperature is constructed and general solution of the constructed model is obtained.

To construct a discrete mathematical model, the tube is divided into m equal parts and the temperature of gas and tube at discrete time $t_n = nh$ in each i-part denoted by $x_i(n)$ and $y_i(n)$ respectively. Here h is a step of time discretization.

Using Newton's law, the above problem can be modelled as follows:

$$z_{n+1} = A\, z_n, \tag{1}$$

where, $z_n = (x_2(n),\, x_3(n), ...,\, x_m(n),\, y_1(n),\, y_2(n), ...,\, y_m(n))^T \in \mathbb{R}^{2m-1}$.

$A = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}B & \bar{\alpha}C \\ \bar{\beta}D & \tilde{\beta}E \end{bmatrix}$, $\tilde{\alpha} = 1-\alpha h$, $\bar{\alpha} = \alpha h$, $\tilde{\beta} = 1-\beta h$, $\bar{\beta} = \beta h$ and B – $(m-1)\times(m-1)$, C – $(m-1)\times m$, D – $m\times(m-1)$ matrices, E – $m\times m$ unique matrix.

It should be noted that, due to constant temperature of gas at the entrance to the tube (it is equal to a) during the heat exchange, i.e. in the 1st part of the tube, is not included to the model (1).

It is obvious that general solution of the system (1) can be written in the form:

$$z_n = A^n\, z_0. \tag{2}$$

For the power of matrix A the following formula is valid

$$A^n = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}BP_{m-2}^{(n-1)}(B) + \bar{\beta}Q_{m-1}^{(n-1)}(B) & \bar{\alpha}CP_{m-2}^{(n-1)}(C) + \tilde{\beta}Q_{m-1}^{(n-1)}(C) \\ \tilde{\alpha}BR_{m-2}^{(n-1)}(B) + \bar{\beta}DS_{m-1}^{(n-1)}(B) & \bar{\alpha}CR_{m-2}^{(n-1)}(C) + \tilde{\beta}S_{m-1}^{(n-1)}(C) \end{bmatrix}$$

where, $P_{m-2}^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{m-2} p_k^{(n)}B^k, Q_{m-2}^{(n-1)} = \sum\limits_{k=1}^{m-1} q_k^{(n-1)}B^k, B^0 = D, S_{m-1}^{(n-1)} = \sum\limits_{k=1}^{m-2} s_{k+1}^{(n-1)}C^k, C^0 = E$ and $p_k^{(n)}, q_k^{(n)}, r_k^{(n)}, s_k^{(n)}$ – are polynomials of $\bar{\alpha}, \tilde{\alpha}, \bar{\beta}, \tilde{\beta}$.

References

[1] A.A.Evdokimov, A.L.Perezhogin. Discrete dynamical systems of a circulant type with linear functions at vertices of network // J. Appl. Industr. Math., 2012, Vol.6, No.2, pp. 160-166.

[2] M.A.Bekimov, F.A.Rihan. A discrete mathematical model for heat transfer process in rotating regenerative air preheater // Differential Eq. and Dyn. Systems USUZCAMP 2017, Springer Proceedings in Mathematics and Statistcs 2018, Vol.268. Springer Cham. pp. 55-61.

On Some Specific Patterns of τ-adic Non-Adjacent Form Expansion over the Ring $Z(\tau)$

Faridah Yunos[1,2] and Syahirah Suberi[3]

[1]*Department of Mathematics, Faculty of Science, 43400 Universiti Putra Malaysia, Serdang, Selangor*

[2,3]*Laboratory of Cryptography, Analysis and Structure, Institute for Mathematical Research (INSPEM), 43400 Universiti Putra Malaysia, Serdang, Selangor*

Let $\tau = \frac{(-1)^{1-a}+\sqrt{-7}}{2}$ for $a \in \{0,1\}$ is Frobenius map from the set $E_a(F_{(2^m)})$ to itself for a point (x,y) on Koblitz curves E_a. Let P and Q be two points on this curves. τ adic non-adjacent form (TNAF) of α an element of the ring $Z(\tau) = \{\alpha = c + d\tau | c, d \in Z\}$ is an expansion where the digits are generated by successively dividing α by τ, allowing remainders of $-1, 0$ or 1. The implementation of TNAF as the multiplier of scalar multiplication $nP = Q$ is one of the technique in elliptical curve cryptography. In this paper, we find some formulas for TNAF that have specific patterns $[c_0, 0, \ldots, 0, c_{l-1}]$, $[c_0, 0, \ldots, c_{\frac{l-1}{2}}, \ldots, 0, c_{l-1}]$, $[0, c_1, \ldots, c_{l-1}]$, $[-1, c_1, \ldots, c_{l-1}]$, $[1, c_1, \ldots, c_{l-1}]$ and $[0, 0, 0, c_3, c_4, \ldots, c_{l-1}]$ when applying $\tau^m = \tau - 2s\tau_{(m-1)} + s_m\tau$ for $s_m = \sum\limits_{i=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-2)^{i-1} t^{m+1}}{(i-1)!} \prod\limits_{j=i}^{2i-2} (m-j)$.

Elliptic Curve Cryptography (ECC) was discovered by Neal Koblitz in the year 1985 [1]. The ECC schemes are public key mechanisms where scalar multiplication (SM) is the dominant operation of ECC. SM is the operation which involving computing integer for multiple times for an integer n and a point P on elliptic curve. While, the Koblitz curves are a special type of curves for which the Frobenius endomorphism can be used for improving the performance of computing an elliptic scalar multiplication [2]. It is defined over F_{2^m} as

$$E_a : y^2 + xy = x^3 + ax^2 + 1$$

where a an element of $0, 1$ and $P = (x, y)$ on the curve [1]. The Frobenius map

$$\tau : E_a(F_{2^m}) \to E_a(F_{2^m})$$

is defined by

$$\tau(x, y) = \left(x^2, y^2\right), \ \tau(\infty) = \infty$$

where ∞ is the point at infinity. The imaginary quadratic number $\tau = \frac{t+\sqrt{-7}}{2}$ satisfies the relation $\tau^2 - t\tau + 2 = 0$ where $t = (-1)^{1-a}$. Figure 1 is an illustration of the SM in this set (refer [3,4,5]) but in this paper, we are implementing the secret key $n = \bar{n}$ in the form of TNAF.

References

[1] F.Yunos, M.K.A. Atan, M.R.S. Said and M.R.K. Ariffin, Pseudo $T-$ Adic Non Adjacent Form for Scalar Multiplication on Koblitz Curves. Malaysian Journal of Mathematical Sciences 9(S) (Special Issue: The 4th International Cryptology and Information Security Conference 2014), 2015, 71–88.

[2] F.Yunos, M.K.A. Atan, M.R.S. Said and M.R.K. Ariffin, Pseudo $T-$ Adic Non Adjacent Form for Scalar Multiplication on Koblitz Curves, Conference Proceeding of The 4th International Cryptology and Information Security Conference 2014, 2015, 120–130.

[3] F.Yunos and S.M.Suberi, Even and Odd Nature for Pseudo $T-$ Adic Non-Adjacent Form, Malaysian Journal of Science, 2018, 37(2), 94–102.

[4] N.Koblitz, Elliptic Curve Cryptosystem, Mathematics Computation, 1987, 48 (177), 203–209.

[5] N.Koblitz, CM Curves with Good Cryptographic Properties, Proc. Crypto'91, 1992, 279–287.

Stress intensity factors for multiple cracks problems in bonded dissimilar materials

K.B.Hamzah[1,4], N.M.A.Nik Long[1,2], N.Senu [1,2], and Z.K.Eshkuvatov[3]

[1]*Laboratory of Computational Sciences and Mathematical Physics, Institute for Mathematical Research, Universiti Putra Malaysia, 43400 Serdang, Selangor, Malaysia*

[2]*Department of Mathematics, Faculty of Science, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia*

[3]*Faculty of Science and Technology, Universiti Sains Islam Malaysia, 71800 Negeri Sembilan, Malaysia*

[4]*Fakulti Teknologi Kejuruteraan Mekanikal dan Pembuatan, Universiti Teknikal Malaysia Melaka, Hang Tuah Jaya, 76100 Durian Tunggal, Melaka, Malaysia*

nmasri@upm.edu.my

The modified complex variable function method with the continuity conditions of the resultant force and displacement function are used to formulate the hyper singular integral equations (HSIEs) for multiple cracks problems in bonded dissimilar materials. Whereas for the thermally insulated cracks problems, the continuity condition of heat conduction function is utilized to formulate the HSIEs. The unknown crack opening displacement (COD) function is mapped into the square root singularity function using the curved length coordinate method. Then the appropriate quadrature formulas are used to solve the obtained equations numerically, with the traction along the crack as the right hand term. The obtained COD is then used to compute the stress intensity factors (SIF) which control the stability behavior of bodies or materials containing cracks or flaws. Numerical results of the nondimensional SIF at all the cracks tips are presented. It is observed that the nondimensional SIF at the cracks tips depend on the elastic constants ratio, the crack geometries, the distance between each cracks and the distance between the crack and the boundary. Whereas for thermally insulated cracks, the nondimensional SIF at the cracks tips depend on the heat conductivity ratio and the thermal expansion coefficients ratio.

Relation between Representations of Figurate Numbers

M.A.M.Johari, S.H.Sapar and N.A.Zaini
Department of Mathematics, Faculty of Science, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia
mamj@upm.edu.my

Figurate numbers are positive numbers that can be represented by geometric patterns as regular geometrical arrangement of equally spaced points. A plane figurate numbers are also called polygonal numbers. They are defined as positive integers that can be represented by regular polygons in a systematic fashion. The most common types of polygonal numbers are the triangular numbers, square numbers and pentagonal numbers.

Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ be a partition of k. That is $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ are integers satisfying $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m \geq 0$ and $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = k$. We denote $s_\lambda(n)$ as the number of representations of an integer n as a sum of squares induced by λ and $t_\lambda(n)$ denote the number of representations of an integer n as a sum of triangular number induced by λ. In other words, $s_\lambda(n)$ is the number of solutions in integers of the equation

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_m x_m^2 = n.$$

and $t_\lambda(n)$ is the number of solutions in non-negative integers of the equation

$$\lambda_1 \frac{x_1(x_1-1)}{2} + \lambda_2 \frac{x_2(x_2-1)}{2} + \ldots + \lambda_m \frac{x_m(x_m-1)}{2} = n.$$

In 2005, Adiga et al. gave a relation between $s_\lambda(n)$ and $t_\lambda(n)$ as

$$s_\lambda(8n+k) = \beta_\lambda t_\lambda(n)$$

for $1 \leq k \leq 7$ where

$$\beta_\lambda = 2^m + 2^{m-1}\left(\binom{i_1}{4} + \binom{i_1}{2}\binom{i_2}{1} + \binom{i_1}{1}\binom{i_3}{1}\right) \tag{1}$$

for i_j denote the number of parts in λ which are equal to $1 \leq j \leq 3$. They provide the proof for the result by using generating functions and the combinatorial method.

Next, Baruah(2008) continue the research on the relationship between $s_\lambda(n)$ and $t_\lambda(n)$. For $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ be a partition of 8, they gave the relations between $s_\lambda(n)$ and $t_\lambda(n)$ for any non-negative integer n as

$$s_\lambda(8n+8) - s_\lambda(2n+2) = \beta_\lambda t_\lambda(n).$$

They provide proof for this relation by using generating function method.

Let $c_\lambda(n)$ denote the number of representations of an integer n as a sum of centred pentagonal numbers induced by λ. In other words, $c_\lambda(n)$ is the number of solutions in non-negative integers of the equation

$$\lambda_1\frac{5x_1^2+5x_1+2}{2}+\lambda_2\frac{5x_2^2+5x_2+2}{2}+\ldots+\lambda_m\frac{5x_m^2+5x_m+2}{2}=n.$$

For example, for $n=23$ and $\lambda=(5,2,1)$ we have $m=3$,

$$5\frac{5x_1^2+5x_1+2}{2}+2\frac{5x_2^2+5x_2+2}{2}+\frac{5x_3^2+5x_3+2}{2}=23$$

Then $23=5(1)+2(6)+1(6)=5(1)+2(1)+1(16)$. Thus, $(x_1,x_2,x_3)=(0,1,1)=(0,0,2)$. Then $c_{(5,2,1)}(23)=2$. Johari et al. (2012) gave a relation between $s_\lambda(n)$ and $c_\lambda(n)$ as

$$s_\lambda\left(\frac{8n-3k}{5}\right)=\beta_\lambda c_\lambda(n)$$

for $1\le k\le 7$ where β_λ is given by Equation (1) and they provide the proof for this relation by using generating function method. Later, the combinatorial proof was given by Johari et al. in 2013.

Now we extend our discussion to the relation between the number of representations of an integer n as sums of squares and number of representations of n as sums of centred pentagonal numbers induced by partitions of 8. The relation is given by following theorem:

Theorem. *Let $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ be a partition of 8. Then for any non-negative integer n, we have*

$$s_\lambda(8n)-s_\lambda(2n)=\beta_\lambda c_\lambda(5n+3),$$

where $\beta_\lambda=2^m+2^{m-1}\left(\binom{i_1}{4}+\binom{i_1}{2}\binom{i_2}{1}+\binom{i_1}{1}\binom{i_3}{1}\right)$ and i_j denote the number of parts in λ which are equal to j.

This theorem has been proved by using generating functions method where there are 22 partitions of 8 to be considered.

References

[1] Adiga, C., Cooper, S. and Han, J.H., (2005). A general relation between sums of squares and sums of triangular numbers. International Journal of Number Theory **1(02)**, 175-182.

[2] Baruah, N.D., Cooper, S. and Hirschhorn, M. (2008). Sums of squares and sums of triangular numbers induced by partitions of 8. International Journal of Number Theory, **4(04)**, 525-538.

[3] Johari, M.A.M., Atan, K.A.M. and Sapar, S.H., (2012). Relation between Square and Centered Pentagonal Numbers. Malaysian J. Math. Sci. **6(02)**, 165-175.

[4] Johari, M.A.M., Atan, K.A.M. and Sapar, S.H. (2013). A Combinatorial Proof For a Relation Between Certain Types of Integers. JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **28(02)**, 129-139.

The Construction and Solution of a Mathematical Model of the Flow of Tourists, Arriving in the Country

Z.Khoshimova
National University in Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
zebo.khoshimova@gmail.com

In this paper we discuss the case which is to take high income that it is obtained from tourists at the end of period T. We construct a mathematical model of the problem with assume that this process is continuous during T.

For a time moment t, consider $S(t)$ which characterizes the number of visited tourists in the country and let $H(t)$ be all costs to build hotels and hostels for tourists, i.e. $S(t)$ depends on the income, received from tourists while $H(t)$ gives us the outcome.

At each moment t, we divide the income which is received from tourists into three parts: to build and reconstruct hotels, expenses for good service and income.

Let c be profit from one tourist at a unit time, then $cS(t)$ is profit from all tourists for an unit of time. So, the model of this problem is represented by differential equations, look at [2, Chapter 117]. We have high income at time which is (see [1] and the references given there)

$$\tau = \frac{a}{\alpha b(a-1)}$$

Now let us turn to paths on the far side of Transition Surface(TS). As initial conditions, we use(S_i are new parameters)

$$H = S_1,\ V_H = k\tau_2 = \frac{1}{\alpha},\ S = S_2,\ V_S = 1,\ T = \tau_2,\ V_T = ks_1 \left(k = b\frac{a-1}{a} \right).$$

Now, we can find the retrogressive path equation for m_4 (one can see this construction in [1, Chapter 121]):

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{H}(t) = -\alpha S\left(1 - \tfrac{bH}{aS}\right) = -\alpha R \\ &\overset{\circ}{S}(t) = -bH + S \\ &\overset{\circ}{T} = 1 \end{aligned} \quad \text{and} \quad \begin{aligned} &\overset{\circ}{V}_H = b\left(-\tfrac{\alpha}{a}V_H + V_S\right) \\ &\overset{\circ}{V}_S = \alpha V_H - V_S = Q \\ &\overset{\circ}{V}_T = 0. \end{aligned}$$

By solving this system of equations, we get the following conclusion. The paths of system fill the whole space E. It is not difficult to determine if they fit into the optimal strategy. First, from the optimal path such that the time is so small while the profit gained from tourists is so many, demand that hotels must be enough. During the profit is being increased, also hotels must be produced at some time among. At time $\tau = \frac{a}{\alpha b(a-1)}$ from termination, we continue servicing but stop the construction of hotels and accumulate reserve funds.

References

[1] Hoshimova Z.: The organization and optimization of a mathematical model of the flow of tourists, arriving in the country, "New theorems of young mathematics-2018", Namangan (2018), p. 184.

[2] Rufus Isaacs: Differential Games, Dover publication, New York (1965).

[3] Hoshimova Z.:The construction and solution of a mathematical model of the flow of tourists who arrive in the country, Modern problems of mathematics and IT, Fergana (2019), p. 106.

On the Performance of High Leverage Collinearity Enhancing Observations Diagnostics Measures

Habshah Midi[1], Shelan Saied Ismaeel[2] and Mohammed A. Mohammed[3]

[1] *Faculty of Science and Institute for Mathematical Research, UPM , 43400, Selangor, Malaysia*

[2] *Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Zakho, Iraq*

[3] *Al-Dewanyia Technical Institute, AUT, Iraq*

habshah@upm.edu.my

Many do not realize that high leverage points, those observations that fall far from the majority of the explanatory variables is another prime source of multicollinearity. High leverage collinearity influential observations (HLCIO) are those high leverage points that can disrupt the multicollinearity pattern of a data. They are referred as high leverage collinearity-enhancing (HLCEO) or high leverage collinearity- reducing observations (HLCRO). The focus of this paper is to present a newly developed diagnostic methods of identifying HLCEO. By correctly identifying those observations, may help statistics practitioners finding the correct remedy to multicollinearity. The usefulness of the proposed methods is studied by some well-known data set and Monte Carlo simulation.

Robust estimator in dual response surface for unbalanced data

Mohd Shafie Mustafa[1], Chin Hui Jie[2], Nazihah Mohamed Ali[3]

[1,2,3] *Department of Mathematics, Faculty of Science, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM, Serdang, Selangor. Malaysia*

mshafie@upm.edu.my

In recent years, much of response surface methodology (RSM) was focused on finding the operating conditions that resulted in an optimum response of the mean with the homogeneity assumptions on the variances. With the economic challenge today, the industrial statisticians have become aware that they can no longer focus only on the optimal process mean of the response of interest. Instead, the process variance of the response also needs to be considered. In a dual response approach, introduced by Vining and Myers (1990), is a useful technique to monitor an industrial process by using both the mean and the standard deviation of the measurements as the responses. In practice, the two separate models give a more understanding analyst of the optimization process and thus allow them to see what levels of the control variables can lead satisfactory values of the response as well as the variance.

The Ordinary Least Squares (OLS) method is extensively employed to obtain the fitted response function for mean and variance by assuming experimental data are normally distributed and there are no outliers in the data (Park and Cho, 2003). For uncontaminated data, the sample mean and the sample variance are efficient measures for location and scale. Nonetheless, both measures are very sensitive in the presence of outliers. Hence to get more efficient results, we proposed to adopt the highly efficient and high breakdown point robust MM-estimator in dual response surface methodology by using different robust designs measures. The objectives of this paper is employ robust designs of response in the construction of the process mean and process standard deviation.

Consider a heteroscedastic regression model;

$$y_i = {x_i}^T\beta + \varepsilon_i \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad E(\varepsilon_i \left| x_i \right.) = 0, \quad E(\varepsilon_i^2 x_i) = \sigma_i^2\ , \qquad (1)$$

where the y_i is the response variables, x_i are known $n \times 1$ design vectors of independent variables, β is an unknown vector of interest, and ε_i is the component of an $n \times 1$ random vector. Assuming $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, and $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)^T$.

Since the resulting optimum responses are not efficiently determined using the sample mean and the sample variance, Park and Cho (2003) proposed using median as an alternative estimator to the mean, and the median absolute deviation (MAD) as alternative estimator to the standard deviation. The mean, standard deviation, and MAD are defined as follows:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \qquad\qquad {s_i}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \qquad (2)$$

$$\mathrm{MAD}(Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n) = \underset{1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}}{\mathrm{median}}\left\{\left|Y_i - \underset{1 \le j \le n}{\mathrm{median}}\,(Y_j)\right|\right\}. \qquad (3)$$

Let the random variable Y forming $Y \sim N(\theta,\ \tau^2)$ and another random variable Z forming $Z \sim N(0,\ 1)$ with the cumulative distribution function $F(\bullet)$. It is easily seen that $Y - \Theta$ and τZ have the same distribution. Let $p(z)$ denote the probability density function (pdf) of Z. The pdf of $W = |Z|$ then becomes $2p(w)$

of which the support is $(0, \infty)$. The median of W is obtained by solving the following equation for m:

$$\int_{m}^{\infty} 2p(w)dw = 1/2. \tag{4}$$

It follows that $2(1-F(m)) = 1/2$. Hence we have $m = median(|Z|) = F^{-1}(3/4)$. When n is large size, $\underset{1\leq j\leq n}{\text{median}}(Y_j) \to \theta$, and $Z_{pn} \to F^{-1}(p)$ as $n \to \infty$, therefore the following results as:

$$\text{MAD}(Y_1, \ \ldots, \ Y_n) \to median\ \{|Y-\theta|\} = \text{ median } (|Z|)\tau = F^{-1}(3/4)\tau.$$

Hence the estimator $MAD/F^{-1}(\frac{3}{4})$ is consistent for the scale parameter τ and we have:

$$D(Y_1, \ Y_2, \ \ldots, Y_n) = \text{MAD}(Y_1, \ Y_2, \ \ldots, \ Y_n)/F^{-1}(3/4). \tag{5}$$

Suppose that $\hat{\mu}(x)$ and $\hat{\sigma}^2(x)$ are the fitted response function for the mean and the variance, respectively. A second-order polynomial response function modeled are considered as follows:

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_{ii} x_i^2 + \sum\sum_{i<j}^{k} \hat{\beta}_{ij} x_i x_j, \tag{6}$$

and

$$\hat{\sigma}^2(x) = \hat{\gamma}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{\gamma}_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \hat{\gamma}_{ii} x_i^2 + \sum\sum_{i<j}^{k} \hat{\gamma}_{ij} x_i x_j. \tag{7}$$

In order to estimate the optimum factor settings, Park and Cho (2003) considered minimizing the squared-loss optimization model:

$$\text{minimize} \quad (\hat{\mu}(x) - T_0)^2 + \hat{\sigma}^2(x), \tag{8}$$

where T_0 is the target response value. We can also use the dual-response optimization model proposed by Vining and Myers (1990);

$$\text{Minimize } \hat{\omega}_\sigma \quad \text{Subject to } \hat{\omega}_\mu = T_0. \tag{9}$$

References

[1] Goethals, P. L. and Cho, B. R. (2011). Solving the Optimal Process Target Problem Using Response Surface Designs in Heteroscedastic Conditions. International Journal of Production Research, Vol. 49, No. 12, 3455-3478.

[2] Midi, H. (1999). Preliminary Estimators for Robust Non-Linear Regression Estimation. Journal of Applied Statistics, 26(5):591-600.

[3] Midi, H., Rana, S., Imon, A.H.M.R (2009a). The Performance of Robust Weighted Least Squares in Presence of Outliers and Heteroscedastic Errors. WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS, 8(7), pp. 351-361.

[4] Midi, H., Norazan, M. R., Imon, A.H.M.R (2009b). The Performance of Diagnostics-Robust Generalized Potential for The Identification of Multiple High Leverage Points in Linear Regression. Journal of Applied Statistics, 36(5):507-520.

[5] Park, C. and Cho, B. R. (2003). Development of Robust Design Under Contaminated and Non-normal Data. Quality Engineering, 15:3, 463-469.

[6] Taguchi G., Wu Y. (1985). Introduction to OO-Line Quality Control. Nagoya, Japan: Central Japan Quality Control Assoction; 1985.

[7] Vining, G. G., Myers, R. H. (1990). Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach. Journal of Quality Technology, 22:34-45.

Threshold exceedances modelling with non-stationary generalized pareto distribution

A.Shihabuddin[1], N.Ali[1,2] and M.B.Adam[1,2]

[1] *Laboratory of Computational Statistics and Operational Research, Institute for Mathematical Research, Universiti Putra Malaysia, 43400 Serdang, Selangor, Malaysia*

[2] *Department of Mathematics, Faculty of Science, Universiti Putra Malaysia, 43400 UPM Serdang, Selangor, Malaysia*

norhaslinda@upm.edu.my

Extreme value theory (EVT) is a branch of statistics which study the stochastic behavior of a process at unusually large or small values [1]. Particularly, EVT provides procedures for tail estimation which are scientifically and statistically rational. Two significant results from EVT are first, the asymptotic distribution of the standardized series of maxima (minima) is shown to converge to the Gumbel, Frechet, or Weibull distributions [2]. A standard form of these three distributions is called the generalized extreme value (GEV) distribution. The second result concerns the distribution of threshold exceedances, where the limiting distribution is a generalized Pareto distribution (GPD) [3]. An important issue in modelling the threshold exceedances using GPD is a threshold selection. Many researchers have proposed the threshold selection method for stationary threshold exceedances modelling. [1] proposed the graphical method based on mean residual life plot coupled with threshold stability plot to choose the threshold value. [4] and [5] propose the plot of return values against their corresponding threshold. A threshold interval where the return value estimates are stable will be selected as the possible threshold value. The selection of threshold using statistical tests have been proposed by [6], [7] and [8]. Threshold selection for non-stationary data have been proposed by [9], [10] and [11]. In this paper, new threshold selection method based on regression tree is proposed to select the threshold in the case of non-stationary threshold exceedances modelling.

Let $y_1, \dots, y_n$ be a non-stationary sequence of observations with $t_1, \dots, t_n$ and $x_1, \dots, x_n$ as covariates. The regression tree is used to partition the y_i sequence into m homogeneous stationary clusters $c_1, \dots, c_m$. The stopping criterion for the regression tree is set such that if all clusters are approximately stationary, the recursive partitioning will be stopped. Kwiatkowski-Phillips-Scmidt-Shin (KPSS) test is used to test the stationary in the resulted cluster. If all observations within each clusters are approximately stationary, a constant high threshold (in term of percentile) is set within each cluster. The percentile is kept similar for all clusters such that the rate of exceedances remain constant throughout the data set. Since the size of each cluster $c_1, \dots, c_n$ are different, m threshold values within m clusters are produced. Each observations, $y_1, \dots, y_n$ will be assigned threshold values according to their clusters. By arranging the threshold values according to their observations, $u_1, \dots, u_n$ a covariate-varying threshold is obtained.

Having determined a covariate-varying threshold, the threshold exceedances $y_i - u_i$ for $i = 1, \dots, n$ is modelled using stationary and non-stationary GPD. For stationary GPD, the parameter of a model is kept constant. While for the non-stationary GPD, the parameter model is allowed to be a function of covariate. The Akaike Information Criterion (AIC) and Bayesian Information Criterion (BIC) are use to compare the performance of the two estimated models. The performance of the proposed threshold selection method based on regression tree is also compared with standard method using Root Mean Squared Error (RMSE) and coefficient of determination (R^2).

References

[1] Coles, S.G. (2001). An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. London: Springer-Verlag.

[2] Fisher, R.A. Tippett, L.H.C. (1928). On the estimation of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24, 180-190.

[3] Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. Annals of Statistics, 3, 119-131.

[4] Shao, Z., Liang, B., Li, H. Lee, D. (2018). Study of sampling methods for assessment of extreme significant wave heights in the South China Sea. Ocean Engineering, 168, 173-174.

[5] Liang, B., Shao, Z., Li, H., Shoa, M. Lee, D. (2019). An automated threshold selection method based on the characteristic of extrapolated significant wave heights. Coastal Engineering, 144, 22-32.

[6] Choulakian, V. Stephes, M.A. (2001). Goodness-of-fit tests for the generalized Pareto distribution. Technometrics, 43(4), 478-484.

[7] Bader, B. Yan, J., Zhang, X. (2018). Automated threshold selection for extreme value analysis via ordered goodness-of-fit tests with adjustment for false discovery rate. The Annals of Applied Statistics, 12(1), 310-329.

[8] Thompson, P., Cai, Y., Reeve, D. Stander, J. (2009). Automated threshold selection methods for extreme wave analysis. *Coastal Engineering*, 56(10), 1013-1021.

[9] Davison, A.C. and Smith, R.L. (1990). Models for exceedances over high thresholds (with discussion). Journal of the Royal Statistical Society Series B, 52, 393-442.

[10] Eastoe, E.F. and Tawn, J.A. (2009). Modelling non-stationary extremes with application to surface level ozone. Journal of the Royal Statistical Society Series C, 58, 25-45.

[11] Northrop, P.J. Jonathan, P. (2011). Threshold modelling of spatially dependent non-stationary extremes with application to hurricane-induced wave heights. Environmetrics, 22(7), 799-809.

Математическая модель оценки и прогнозирования спроса на выпускников высших учебных заведений на рынке работодателей

А.Абдуллаев[1], Л.А.Кадирова[2]
[1] *Ферганский филиал ТАТУ*
[2] *Андижанский государственный университет*

Управление образованием в условиях рыночной экономики требует прогнозирования спроса на выпускников высших учебных заведений на рынке труда, подготовленных на основании компетентностного подхода [1]. Степень развития той или иной компетенции выпускника вуза может зависеть от множества факторов, и в случае недостаточности развития отдельного из них влияет на итоговый результат. Тогда решение принимается на основании отдельного набора параметров, что порождает многокритериальную задачу. Однако, существуют методы интегрирования множества критериев в один обобщенный, примером которого является аддитивная свертка: $K = \sum\limits_{i=1}^{p} k_i$ где k_i – числовое значение i-го параметра, p-количество критериев. Когда каждый параметр имеет важное значение, то применяется мультипликативная свёртка, в которой ни один из критериев не принимает нулевого значения, иначе, все произведение обратится в нуль: $K = \sum\limits_{i=1}^{p} k_i$, где k_i – числовое значение i-ого критерия, p – количество критериев (параметров), m_i – вес или коэффициент значимости i-го критерия.

Выбор функциональной зависимости (полиномиальной, логарифмической и др.) зависит от точности оценки компетенции. Посредством вычисления полного дифференциала функции

$$q : \quad dq = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i} dx_i,$$

где dx_i – точность оценки i-го компонента компетенции определяется точность оценки компетенции. Для повышения ее достоверности предлагается минимизировать ошибку погрешности: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i} dx_i \rightarrow min$.

Следующая математическая модель в виде полинома служит моделью для оценки компетенций: $Q = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n = \sum_{i=1}^{n} b_ix_i$, что позволит оценить частную компетенцию. Каждый критерий x_i регулируется коэффициентом b_i, который отражает его значимость или вес. При этом для всех критериев допускается количественное соответствие между собой. Поскольку для формирования каждой компетенции предусмотрено различное количество дисциплин учебного плана, то предлагается использовать среднюю оценку для обеспечения возможности сравнивать полученные числовые значения по каждой компетенции:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i k_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i},$$

где q – оценка частной компетенции; d_i, k_i, b_i – достижения студента по трём видам контроля; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – коэффициенты весомости. Частные компетенции формируют области профессиональной деятельности. В данном случае влияние каждого параметра значимо поэтому целесообразно применить мультипликативную свертку:

$$Q_j = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i d_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i k_i + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i b_i}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i \gamma_i} \right)^{M_i},$$

где M_i – коэффициент весомости; k-количество единичных показателей.

Литература

[1] Якимова Е.А., Андрющенко А.Н. Разработка комплексной методики оценки и прогнозирования потребностей бизнеса и региона в профессиональных кадрах. [Электронный ресурс] URL: http://creativeconomy.ru/lib/38470 Экономика труда. 2017, №4. С. 323-342.

[2] Кадирова Л.А., Сайидова Н.К. Методика прогнозирования потребностей региона в квалифицированных кадрах. VIII Международная научно-практическая конференция "Приоритетные направления науки и образования". Наука и просвещение. Международный центр научного сотрудничества. Российская Федерация, г. Пенза. 2019.

Сравнительный анализ методов построения моделей "структура – активность"

Ф.Адылова[1], Б.Н.Кузиев[2], Р.Давронов[3]

[1,3]*Института математики им. В.И.Романовского АН РУз*

[2]*Джизакский политехнический институт*

fatadilova@gmail.com

В настоящее время разработка новых лекарств в значительной степени зависит от применения вычислительных методов. Предсказания биологических и физико-химических свойств лекарственных соединений существенно снижает количество экспериментов.

Известная интернет-среда химического моделирования (OCHEM) является открытой веб-платформой для хранения данных, разработки моделей и публикации химической информации [http://www.ochem.eu]. Нам представляется интересным сравнить функциональность пакета OCHEM с методом kNN-QSAR, поскольку ранее [1] мы убедились, что алгоритм kNN-QSAR с включенными процедурами k-ближайших соседей, кросс-валидации и отжига при выборе дескрипторов и принятыми критериями оценки качества моделей генерирует надежные прогнозные модели.

Целью настоящей работы является сопоставление двух подходов к построению точных моделей прогноза активности, kNN-QSAR и OCHEM по принятым статистическим критериям, включая точность прогнозирования на допустимой области их применения (Applicable Domain, AD).

OCHEM позволяет выполнять полный цикл QSAR/QSPR моделирования в полуавтоматическом режиме. Платформа имеет две основные подсистемы: базу данных экспериментально измеренных свойств химических соединений и модули моделирования. Подсистема базы данных включает в себя хранение экспериментальных конечных точек и инструменты для эффективного ввода, поиска и обработки данных. Структура моделирования предоставляет возможности для использования этих данных в процессе моделирования и выполнения всех этапов типового рабочего процесса: подготовка данных, расчет и фильтрация молекулярных дескрипторов, применение методов машинного обучения и анализ эффективности моделей.

OCHEM позволяет выполнять полный цикл разработки модели QSAR, который включает в себя: управление наборами экспериментальных данных; расчет молекулярных дескрипторов (OCHEM поддерживает более 20 типов современных молекулярных дескрипторов); запуск выбранного метода машинного обучения; протокол проверки модели; расчет статистик модели; применение модели к новым соединениям.

В настоящее время OCHEM поддерживает следующие методы машинного обучения: ASNN-Associative Neural Networks, Bagging, FSMLR, J48 decision tree (Weka implementation), KNN (k nearest neighbors), LIBRARY meta-learning, Partial Least Squares (PLS), XGBoost (Scalable and Flexible Gradient Boosting)), Deep Neural Networks.

Обычно используемые показатели прогностичности построенной модели, – среднеквадратичная ошибка (RMSE), средняя абсолютная ошибка (MAE) и квадрат коэффициента корреляции: q^2 (обучающая выборка) и R^2 (тестовая выборка) [2].

Вычислительные эксперименты проводились на соединениях алкалоидов гармалы обыкновенной хиназолинового строения и их производных [3], которые были разделены на две группы: 1) соединения собственно хиназолинового строения или дезоксипеганинового ряда (соединения от 1 до 43); и 2) соединения хиназолонового строения или дезоксивазиционого ряда (соединения от 44 до 65).

Химические структуры исследуемых соединений записаны в формате SMILES с использованием программы MedChemDesing 3.0. Пакетом *rcdk* вычислили 91 исходный дескриптор. После стандартной фильтрации соединений и дескрипторов (пропуски, выбросы, порог коэффициента корреляции) осталось 55 соединений и 22 дескриптора, выбранных методом отжига (SA).

Исходное множество соединений трижды методом простой рандомизации было разделено на три подмножества (выборки): 60 % -обучение, 20 % -тестирование (контрольная выборка), 20% -внешняя выборка (по отношению к обучающей и контрольной), на которой определялось область применимости (Application Domain, AD).

Проводились два вычислительных эксперимента (ВЭ): в первом ВЭ получили прогностические модели, удовлетворяющую статистическим критериям точности на обучающей и тестовой выборке методом kNN-QSAR и 9 методами из OCHEM. Второй ВЭ показал, насколько точно определяются AD в методе kNN-QSAR и пакете OCHEM, для чего рассчитывали AD на внешней выборке вышеописанными способами, одновременно с точностью прогноза моделей на полученном AD по значению RMSE.

Литература

[1] Адылова Ф.Т., Давронов Р.Р., Жамилов У.У, Муродов Ш.Н. Оценка эффективности подхода kNN-QSAR моделирования в хемоинформатике ДАН, №4, 2017, С. 3-6.

[2] Golbraikh A., Tropsha A. Beware of q^2! Journal of Molecular Graphics and Modelling 20 (2002) 269-276.

[3] Адылова Ф.Т., Жамилов У.У., Давронов Р.Р., Муродов Ш.Н., Азаматов А.А. Прогноз $ЛД_{50}$ активности алкалоидов гармалы обыкновенной хиназолиного, хиназолоного строения и их производных на основе QSAR моделей. Кимевий технология назорат ва бошкарув. №5, 2015, С. 21-27.

О статистическом управлении нормального процесса на промежутке времени

С.А.Ахмедов[1], К.С.Аблазова[2]
[1,2] *Андижанский государственный университет*
s.a.axmedov@mail.ru, k.s.ablazova@gmail.com

Обычно технологические операции на производстве выполняются на некотором промежутке времени. При этом по различным причинам в размерах изготовляемой продукции мы наблюдаем изменчивость.

Если источником изменчивости влияющий на индивидуальные значения результата процесса будет простые (случайные) причины, то полный размах присущей стабильному процессу изменчивости назовем воспроизводимостью процесса. Если изменчивость появляются из-за обычных и особых причин то размах полной изменчивости процесса мы назовем пригодностью процесса. При помощи статистических методов в обоих случаях можно оценить процент возникновения брака продукции.

На производстве «держать» размеры выпускаемой продукции внутри границ естественной изменчивости называют правилом «шесть сигма». При этом выход негодной продукции составляет 0.27%. Если появляются особые причины, то эти правила нарушаются. Поэтому возникает задача управления процесса в промежутке времени, когда идёт технологические операции.

Имеются различные варианты решения этой задачи [1].

В тезисе мы приведем решение, когда процесс нормальный. При этом используем статистический инструмент так называемые контрольные карты (КК). Далее сначала дадим краткую характеристику КК и проведем результат.

Пусть X определяет размер изготовляемой продукции, и она распределена нормально: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Из X берем выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Статистический показатель корреллированный с качеством продукции обозначим через $g = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

КК это графическое представление характеристики процесса, показывающее нанесение значения g этой характеристики, центральную линию (CL) и контрольные границы (LCL и UCL).

При этом значение LCL (нижняя контрольная граница) и UCL(верхняя контрольная граница) зависят от распределения статистики g. CL задается техническим стандартом или оценивается по предварительным выборкам.

Чтобы ввести на производству КК сначала нужно определить ее характеристики: g, LCL, и UCL. Если они известны, то из текущего процесса берем мгновенные выборки $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$, $i = 1, \ldots, k$ в определенные моменты $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и вычислим значения $g_i = g(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$. Значения

g_i, LCL, CL и UCL отметим на вертикальной оси,точки t_1, t_2, ..., t_k на горизонтальной оси.

Находим на плоскости точки (t_i, g_i), $(i = \overline{1,k})$ их присоединяем отрезками. Проведем параллельные прямые к горизонтальной оси через точки LCL, CL и UCL и мы получаем графическое изображение состояния изучаемого процесса. Если $g_i \in (LCL, UCL)$, то говорят процесс находится в статистически управляемом состоянии.

Имеются различные типи КК используемые на производстве [2]. Здесь мы укажем две КК используемые при управлении нормального процесса промежутке времени. Эти КК можно использовать в первоначальном этапе изучения процесса. При этом статистическим показателем берем эмперический коэффициент асимметрии (a-карта) и экцесса (γ-карта).

Имест место следующая теорема, которая определяет границы КК.

Теорема. *Пусть процесс находится в статистически управляемом состоянии. Тогда статистической достоверностью можно однозначено определить LCL и UCL для a-карты и для γ-карты.*

Если КК введены на производстве, то из текущего процесса берем мгновенные выборки и по правилам проведенных выше будем управлять процесс.

Литература

[1] Миттаг Й., Ринне Х. Статические методы обеспечения качества. М.: Машиностроение, 1995.

[2] Адлер Ю.П., Максимова О.В., Шпер В.Л. Контрольные карты Шухарта в России и за рубежом: краткий обзор современного состояния (статистические аспекты). Журнал "Стандарты и качество", №. 8. 2011.

О локальной предельной теореме для ветвящихся случайных процессов Гальтона-Ватсона

Ш.Ю.Жураев

Институт математики АН РУз имени В.И.Романовского

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ последовательность независимых неотрицательных целочисленных случайных величин (с.в.) с общей производящей функцией

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad |x| \le 1, \quad F(1) = 1\,,$$

и определена одном и том же пространстве $(\Omega, \Im, P)$.

Ветвящийся случайный процесс Гальтона-Ватсона $\{Z_n, \ \ n \geq 0\}$ определяется следующими рекуррентными формулами:

$$Z_0 = 1, \ Z_1 = \{0, 1, 2, ...\}, \ Z_2 = X_1 + \ldots + X_{Z_1}, \ldots \ Z_{n+1} = X_1 + \ldots + X_{Z_n}, \ n \geq 1 \tag{1}$$

(см.[1], глава I, §1, §2,11-13 стр.)

Из рекуррентной формулы (1) следует, что производящие функции

$$F_0(x) = Ex^{Z_0} = x, \ F_1(x) = Ex^{Z_1} = Ex^{X_1} = F(x), \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$F_n(x) = Ex^{Z_n} = F_{n-1}(F(x)) = F(F_{n-1}(x)).$$

Вероятность вырождения процесса в момент времени n

$$P_n(0) = P(Z_n = 0) = F_n(0),$$

а вероятность продолжения процесса

$$Q_n = P(Z_n > 0) = 1 - P(Z_n = 0) = 1 - F_n(0).$$

А.Н.Колмогоров [2] установил, что при $m = F'(1) < 1$

$$Q_n = Km^n(1 + o(1)),$$

где K некоторая константа зависящая от $F(x)$.

В настоящем сообщении доказана следующая

Теорема. *Если при некотором* $\varepsilon > 0 \ \ E|X_1|^{1+\varepsilon} < \infty$, *то при* $m < 1$

$$Q_n = Km^n(1 + O(m^{n\varepsilon})).$$

Литература

[1] Севастянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М. «Наука» 1971, 603 стр.

[2] Колмогоров А.Н. К решению одной биологической задачи. «Изв. НИИ мат. и мех. Томского университета», 1938, Т.2, вып.1.

Об одном усилении теоремы А.Сарда

Т.Т.Ибайдуллаев

Андижанский государственны университет

ibaydullayev73@mail.ru

Во многих разделах математики важную роль играет следующая теорема А.Сарда о множестве значений гладких функций ([1], гл.3, стр.93).

Теорема 1. *Если* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *– отображение класса* C^r, $r \geq \max(0, n - k)$, *то мера множества критических значений отображения* f *равна нулю.*

Н.Ю.Сатимовым была предложена следующая версия этой теоремы для скалярных функций.

Пусть функция $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет производную в каждой точке. (В отличие от теоремы Сарда непрерывность производной не требуется.) Положим $C = \{t \in [a;\, b] : f'(t) = 0\}$.

Теорема 2. *Мера множества $f(C)$ равна нулю.*

Доклад посвящается доказательству теоремы 2.

Литература

[1] Хирш М.Дифференциальная топология, -М.: Мир, 1979, 279 с.

Конечно-разностный метод решения пространственной задачи термоупругости

А.А.Каландаров[1], А.А.Халджигитов[2], А.Каландаров[3]
[1,3]*Гулистанский государственный университет*
[2]*Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий*

Исследование процессов деформирования конструкций и их элементов с одновременным учётом тепловых и механических факторов играет важную роль во многих прикладных задачах науки и техники, связанных с нагреванием различных частей исследуемого объекта. Эти процессы обычно, удобно сформулировать в виде связанных или несвязанных термоупругих и термопластических краевых задач [1].

В работе [2] была решена вариационно-разностным методом задача о термоупругом параллелепипеде. При этом предположенно, что поверхность параллелепипеда свабодна от нагрузок и внутри которого дано температурное поле по формуле

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0 \sin\frac{\pi x}{l_1} \sin\frac{\pi y}{l_2} \sin\frac{\pi z}{l_3} \tag{1}$$

где $l_i,\ i = \overline{1,3}$ – длина рёбер параллелепипеда, T_0 – температура. Заметим, что на поверхности параллелепипеда температура $T|_{\sum} = 0$.

Краевая задача термоупругости может быть сведена к системе трёх дифференциальных уравнений относительно перемещений т.е. [3]

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) - \gamma\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right) - \gamma\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\right) + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \gamma\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

со следующими краевыми условиями о свободности поверхности параллелепипеда от нагрузок.

$$\begin{cases} \sigma_{11}|_{x=0,l_1} = \left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} - \gamma(T-T_0)\right]\Big|_{x=0,l_1} = 0 \\ \sigma_{12}|_{x=o,l_1} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{x=o,l_1} = 0, \quad \sigma_{13}|_{x=o,l_1} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{x=o,l_1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \sigma_{22}|_{y=0,l_2} = \left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} - \gamma(T-T_0)\right]\Big|_{y=0,l_2} = 0 \\ \sigma_{21}|_{y=o,l_2} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=o,l_2} = 0, \quad \sigma_{23}|_{y=o,l_2} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big|_{y=o,l_2} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sigma_{33}|_{z=0,l_3} = \left[\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} - \gamma(T-T_0)\right]\Big|_{z=0,l_3} = 0 \\ \sigma_{31}|_{z=o,l_3} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=o,l_3} = 0, \quad \sigma_{32}|_{z=o,l_3} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big|_{z=o,l_3} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения (2-5) заменялись конечно-разностными отношениями и решались итерационным методом при следующих исходных данных

$$\nu = \frac{1}{3}, \quad E = 2{\cdot}10^4, \quad \alpha = 125{\cdot}10^{-7}, \quad l_i = 1, \quad i = 1,2,3, \quad N_1 = N_2 = N_3 = 10$$

Для решения уравнений с точность $\varepsilon = 0.001$ потребовалось 58 итераций.

По ним можно увидеть, что значение напряжения в центре параллелепипеда равно $\sigma_{11} = -3.62$ а, на поверхностях, согласно краевым условиям равно нулю.

Литература

[1] Khaldjigitov A.A., Qalandarov A., Nik M.A.Asri Long., Eshquvatov Z. Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems. International journal of modern physics. Vol. 9, pp. 503-510, (2012).

[2] Цаплин А.И. К решению пространственной задачи термоупругости вариационно-разностным методом. В кн. вопросы теории упругости и пластичности. Свердловск, 1978. С. 65-72.

[3] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

Об одной трехмерной обратной задаче теории фильтрации флюидов

Ш.Каюмов[1], А.Б.Каюмов[2]

Известно что в процессе промысловых исследований месторождений флюидов определяется пластовые характеристики в дискретных точках (скважинах) и эти данные в процессе разработки могут изменяться. Чтобы уточнить эти данные часто приходится решать коэффициентное обратные задачи. Существует различные способы решения этих задач один из которых рассматривается здесь.

Пусть в неоднородной и недеформируемой области D содержится флюид (жидкость или газ). Изменения давления при изотермической фильтрации определяется как решения следующей задачи [1]:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \\ = M(x,u)\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N(t)} Q_i(t)\,\delta(x-x_1, x-x_2, x-x_3)\,\eta(t-t_i),\end{gathered} \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in \bar{D}, x = (x_1, x_2, x_3), \tag{2}$$

$$\alpha u + (1-\alpha)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_D = \psi(x), x \in \left\{D \cup (0,T)\right\}, \alpha = \overline{0,1}, \tag{3}$$

$$\eta(t-t_i) = \begin{cases} 0, t < t_i, \\ 1, t \geq t_i, \end{cases} \quad M(x,u) = \gamma(u)\,m(x). \tag{4}$$

Здесь $u(x,t)$ – функция давления, $K(x), m(x)$ – функции характеризующие параметры пласта.

Задача (1)-(4) трактуется как коэффициентной обратной задачей в смысле что по известным значением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и фактическим значениям $Q(t), \bar{u}(x,t)$ за интервал времени $t \in (0,T)$ требуется определит значения коэффициентов $K(x), m(x)$ минимизируещие функционал

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^{N(t)} \left[u(x_i,t) - \bar{u}(x_i,t)\right]^2 dt. \tag{5}$$

Задачи (1)-(3) при известных значениях коэффициентов $K(x)$ и $m(x)$ решается численно [2, 3] как прямая задача. Минимум функционала (5) можно найти методами оптимизации [4, 5].

При дискретизации задачи (1)-(3) необходимо будет фактические значения функции давлений и дебиты которая соответствуют периоду Δt_k. Фактические данные полученные из истории разработки могут не совпадать с дискретными значениями вычисленное как решения прямой задачи и поэтому необходимо их предварительной обработки либо путем осреднения за промежутки Δt_k либо другими методами.

Для определения функции давления $\bar{u}_i(t_k)$ можно построит зависимость $u_i(t) = \varphi(Q_i(t), t)$. При $t = t_k$ она примет вид $\bar{u}_i(t_k) = \varphi(Q_i(t_k - 0), t_k)$. Здесь $Q_i(t)$ – фактическое значение дебита в момент времени t. $Q_i(t_k - 0)$ – среднее значение дебита $i-$ й скважины за времени Δt_k.

Фактически зависимость (6) можно рассматривать как решения задачи (1)-(4) при известных K и M.

Литература

[1] Каюмов Ш. Математическое моделирование задач теории фильтрации со свободными границами. Т.: ТГТУ, 2017, 273 с.

[2] Каюмов Ш. Приближенно-аналитические методы решения задач теории фильтрации вязкопластических флюидов. Т.: Изд. во: ФАН РУз., 1991, 156 с.

[3] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1990. 614 с.

[4] Цыпкин З. Адаптация и обучения в автоматических системах. М.: Наука, 1979. 656 с.

[5] Ивахненко А.Г. Принятия решений на основе самоорганизации. М.: Наука, 1976. 280 с.

Устойчивость некоторых стационарных нелинейных крупномасштабных систем

Р.В.Муллажонов, Ш.Н.Абдугаппарова, Ж.В.Мирзаахмедова

Андижанский государственный университет

Стационарные системы с нелинейными структурными возмущениями исследованы недостаточно полно. Поэтому представляет интерес задача об устойчивости такого рода систем.

Покажем, что имеет место, следующее утверждение.

Теорема 1. *Состояние равновесия $x = 0$ систем*

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{и} \quad \dot{x} = A\phi\,(x)\,x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A – постоянная матрица, одновременно будет устойчивым (асимптотически устойчивым) или неустойчивым, соответственно, при любой скалярной строго положительной функции $\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Далее рассмотрим нелинейные системы уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T$, $f(0) = 0$.

Предположим, что $f_j(x) = \sum\limits_{l=1}^{n} f_{jl}(x)x_l$, $j = \overline{1,n}$. При этом систему (2) можно представить в следующем виде

$$\dot{x} = A(x)x \tag{3}$$

где $A(x) = (f_{jl}(x))\,,\ j,l = \overline{1,n}$.

Для функции, существуют линейно независимые строго положительные скалярные функции [1]

$$\phi_0(x) = c,\ \phi_1(x),\ \phi_2(x), ..., \phi_m(x),$$

с порядком строгости $\varepsilon_i > 0,\ \ i = \overline{1,m}$, соответственно, такие, что

$$f_{jl}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{jl}^{i}\phi_i(x),\ \ j,l = \overline{1,n},$$

где α_{jl}^{i} – некоторые постоянные.

Учитывая это, систему (2) представим в виде

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=0}^{m} A_i\phi_i(x)\right)x, \tag{4}$$

где $A_i = \left(\alpha_{jl}^{i}\right),\ j,l = \overline{1,n},\ \ i = \overline{1,m}.$

Для исследования устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (4) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы

$$\dot{x} = A_i x,\ \ i = 1,2,3,...,m. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть в системах (4) и (5) матрицы A_i и функции $\phi_i(x)$ удовлетворяют условиям:*

а) матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ i = 1,2,...,m$ невырожденные, симметрические относительно главной диагонали и для каждого $1 \le i \le m$ A_i и $-A_i$ не имеют общих собственных значений;

б) $\phi_i(x)$ – строго положительные скалярные функции с порядком строгости $\varepsilon_i > 0,\ \ i = 1,2,...,m$, соответственно;

Тогда из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояния равновесия $x = 0$ всех систем (5) следует устойчивость (асимптотической устойчивость) или неустойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (4) соответственно.

Следствие. *Если состояние равновесия $x = 0$ хотя бы одной системы из совокупности систем (5) асимптотически устойчиво, и состояние равновесия $x = 0$ остальных систем устойчиво, то состояние равновесия системы (4) асимптотически устойчиво.*

Следствие. *Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (4) а) устойчиво, если $\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i\lambda_M(G_i) \le 0$; б) асимптотически устойчиво, если $\sum\limits_{i=0}^{m}\varepsilon_i\lambda_M(G_i) < 0$; в) неустойчиво, если $\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i\lambda_m(G_i) > 0$.*

Литература

[1] Мартынюк А.А., Муллажонов Р.В. К теории устойчивости стационарных линейных крупномасштабных систем // Прикладная механика. Т. 46, №4., 2010.

Оптимизации в условиях многостадийных системы управления процессом

З.У.Ортиков[1], О.Рахмонов[2]

[1,2] *Андижанский государственный университет*

Сформулированная задача контурной оптимизации в условиях МСП решается с учетом топологии схем (структуры) системы и характеристики исходного сырья. Для каждого вида сырья определяется схема (маршруты) переработки сырья, выделяются контуры управления, для каждого контура строится соответствующая модель, решается задача контурной оптимизации с учетом последовательности расположения контуров в пространстве и временных запаздываний.

Суммируя материальные расходы, затрачиваемые на управление каждым контуром МСП, определим общий расход, затрачиваемый на обеспечение эффективного функционирования МСП в целом

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_1} C_k U_{ik} = U,$$

где U – суммарный расход на управление МСП в целом.

В большинстве случаев единовременная оптимизация всех параметров, определяющих ход и результаты процесса в многопараметрических МСП, не представляется возможной. В связи с этим прежде всего необходимо определить последовательность выполнения процедур оптимизации работ, позволяющих на каждом этапе достичь таких значений регулируемых технологических параметров, при которых состояние процесса будет способным к выполнению производственных заданий.

Таким образом, осуществление алгоритма контурной оптимизации предопределяет выполнение следующих этапов [1,4,5]:

распознавание вида исходного сырья и материалов; выбор из множества эталонных моделей модели соответствующей технологической ситуации;

проверка модели на адекватность; корректировка параметров модели;

выбор критерия контурной оптимизации; анализ задания верхнего уровня оптимизации;

определение допустимой области ограничения на параметры контура управления;

согласование критериев контурной и межконтурной оптимизации; определение оптимальных значений управляющих параметров контура управления, обеспечивающих экстремум для выбранной функции цели;

анализ результатов контурной оптимизации и принятие решений.

Поиск оптимальных решений является сложной задачей, которая еще более усложняется побочными факторами, затрудняющими ее постановку и решение.

Для того чтобы построить оптимальную систему автоматизированного управления контурами МСП, необходимо по имеющейся информации о контуре управления и критерию оптимальности синтезировать оптимальное управление, которое может быть реализовано в виде рационального технологического режима. Однако оптимальный режим, синтезированный на основе имеющейся априорной информации о контуре управления, недолго будет оставаться оптимальным. В процессе функционирования технологического контура управления его параметры изменяются (старение, износ, изменение характеристик сырья и т.д.) и установленный режим перестает быть оптимальным. В связи с этим возникает необходимость определения новых параметров объекта управления с целью восстановления оптимального режима функционирования технологического процесса. [2,3]

Такая система в целом представляет собой оптимальную систему автоматического управления с адаптацией.

Литература

[1] Мочальник И.А. "Основы технологии и продукция промышленности строительных материалов": пособие / И.А. Мочальник. Минск: БГЭУ, 2009. 157 с.

[2] Таймасов Б. Т.. Технология производства портландцемента. Учеб. Пособие. Шымкент. Изд-во ЮКГУ, 2003. 297 с.

[3] Пиров Ф.С. Имитационное моделирование технологических процессов термической обработки в среде RDO/ Исмоилов М.И., Умаралиев Р.Ш., Пиров Ф.С.//Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Естественные, технические и медицинские науки N3(41), 2011, с.47-56.

[4] Норенков И.П.. Автоматизированные системы управления технологическими процессами. Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. 2002, N 1.

[5] Кусимов С.Т., Ильясов Б.Г., Исмагилова Л.А., Валеева Р.Г. Интеллектуальное управление производственными системами. М.: Машиностроение, 2001 г., 327 с.

Формирование оптимальной многоуровневой системы управления процессом

З.У.Ортиков, Б.Мирзаахмедов

Андижанский государственный университет

Рассмотрим подход многоуровневой декомпозиции структуры МСП, опирающейся на специфические особенности МСП и задач оптимизации. При этом сохраняются существенные соотношения между моделями производства и его отдельных частей.

Многостадийная система состоит из глобальной управляющей подсистемы, определяемой векторной целевой функцией

$$Y(x) = \left\{ f_k(x), x \geq 0,\, k = \overline{1, k} \right\},$$

где $x = \left\{ x_j,\, j = \overline{1, N}, x_j \geq 0 \right\}$-вектор неизвестных, и k-количество нижестоящих локальных управляющих подсистем $f_k(x)$, $k = \overline{1, K}$, которые могут быть как непосредственно управляемым и регулируемым процессом, так и управляющей подсистемой для нижестоящих по иерархии подсистем, где K-множество индексов локальных подсистем.

Пусть $X = \left\{ x_j,\, j = \overline{1, N} \right\}$-вектор неизвестных, выражающий показатели эффективности, например: объем, себестоимость, качество, затраты и др. j-го вида продукции, выпускаемой всей системой, где N – множество индексов видов продукции; $X_k \in x,\ k = \overline{1, K}$-вектор неизвестных, выражающий эффективность продукции, выпускаемой $k \in K$ локальной подсистемой, $X_k = \left\{ x_j,\, j = \overline{1, N_k} \right\}$, где N_k – множество индексов видов продукции, выпускаемой $k \in K$ локальной подсистемой, $N_k \in N$.

Основная цель глобальной управляющей подсистемы состоит в общей оптимизации всех критериев локальных подсистем, $\mathrm{extr} Y(x) = \left\{ f_k(x), x \geq 0, l = \overline{1, K} \right\}$, которые для верхней управляющей подсистемы одинаково важны и равнозначны, т.е. заранее не отдается предпочтение какой-либо локальной подсистеме. При этом необходимо найти такой вектор X^0 и соответственно $X_k^0 \in X^0$, при котором все локальные подсистемы достигали бы своего оптимума в условиях выполнения ограничения по ресурсам $R(x) \leq C,\ \ r_i(x) \leq c_i,\ \ x \geq 0,\ \ i = \overline{1, M}$, где i-вид ресурсов, которые необходимы при выпуске, M – множество индексов видов ресурсов; c_i – ограничения по i-му виду ресурсов.

Как правило, в МСП каждая k-ая локальная подсистема имеет свои целевые функции $f_k(x),\ \ x \geq 0,\ \ k = \overline{1, K}$, и ограничения $R^k(x_k) \leq C^k,\ \ r_i^k(x_k) \leq c_i^k,\ \ x_k \geq 0,\ \ i \in M,\ \ k = \overline{1, K}$.

Цель каждой локальной подсистемы МСП состоит в экстремизации своего критерия, которым может быть прибыль, качество, стоимость управления, себестоимость продукции и др. Здесь следует особо отметить, что критерии локальных подсистем МСП вовсе не обязательно должны соответствовать глобальному критерию системы, т.е. локальные и глобальные критерии могут быть различными, но локальные критерии должны способствовать достижению глобальной цели.

Применительно к конкретным МСП, в частности обогатительного производства портландцемент, в [1,2] рассмотрены вопросы построения межконтурных оптимизационных процедур. Идея этого подхода состоит в декомпозиции МСП на взаимосвязанные внутренними материальными потоками контуры управления. При этом декомпозиция осуществляется путем минимизации количества выделяемых контуров управления, с однозначным определением функции цели всей системы через промежуточные входные и выходные параметры контуров управления.

Литература

[1] Кириллов А.Н. Управления многостадийными технологическими процессами. Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2006, Вып. 4. С. 127-131.

[2] Shervin Asadzadeh, Abdollah Aghaie, Su-Fen Yang. Monitoring and Diagnosing Multistage Processes: A Review of Cause Selecting Control Charts (Мониторинг и диагностика многоступенчатых процессов: обзор причины Выбор контрольных диаграмм). Журнал промышленной и системной инженерии. Том 2, 2008, №3, С. 214-235.

Об обобщенном процессе восстановления с переключениями

В.Р.Ходжибаев

Наманганский инженерно-строительного институт

Пусть $\left\{\xi_i^{(j)}\right\}_{i=1}^{\infty}$, $\left\{\eta_i^{(j)}\right\}_{i=1}^{\infty}$, $j = 1,2$ взаимно независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределенных внутри каждой последовательности, $a_1 = E\xi_1^{(1)} > 0$, $a_2 = E\xi_2^{(2)} < 0$, $\mathrm{P}\left(\eta_1^{(j)} \geq 0\right) = 1$, $j = 1,2$. Обозначим

$$\begin{aligned}
&S_0^{(j)} = 0, \quad S_k^{(j)} = \xi_1^{(j)} + \xi_2^{(j)} + ... + \xi_k^{(j)},\\
&\eta_j(t) = \max\left\{k : \eta_1^{(j)} + \eta_2^{(j)} + ... + \eta_k^{(j)} < t\right\},\\
&\xi_j(t) = S_{\eta_j(t)}^{(j)}, \quad j = 1,2.
\end{aligned}$$

Случайные процессы $\xi_j(t)$, $j = 1,2$ называются обобщенными процессами востановления. Если случайные величины $\eta_1^{(j)}$ показательно распределены, то процессы $\xi_j(t)$ являются однородными, т.е. обобщенными пуассоновскими процессами.

Для произвольного $b > 0$ определим случайные величины

$$\tau_+ = \inf\left\{t \geq 0 : \ \xi_1(t) \geq b\right\}, \ \tau_- = \inf\left\{t \geq 0 : \ \xi_2(t) \leq -b\right\}.$$

Рассмотрим две независимые между собой последовательности τ_+, τ_1, $\tau_3, ..., \tau_{2k+1}, ...$ и τ_-, τ_2, $\tau_4, ..., \tau_{2k}, ...$ независимых одинаково распределенных внутри каждой последовательности случайных величин, и пусть

$$\theta_k = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_k, \ \ \theta_0 = 0.$$

Случайный процесс $X(t)$ строится следующим образом: $X(0)=0$, при $k=0,\ 1,\ 2,...$

$$X(t)=\begin{cases}\min\{\xi_1(t-\theta_{2k}),\ b\}, & \theta_{2k}<t\le\theta_{2k+1},\\ \max\{b+\xi_2(t-\theta_{2k+1},\ 0)\}, & \theta_{2k+1}<t\le\theta_{2k+2}.\end{cases}$$

Процесс $X(t)$ совпадает с $\xi_1(t)$ до тех пор пока впервые не будет достигнут уровень b в момент времени τ_1 и полагаем $X(\tau_1)=b$. При $t>\tau_1$ в качестве приращений процесса $X(t)$ используется приращении процесса $\xi_2(t)$ до тех пор, пока впервые после $\theta_1=\tau_1$ не будет достигнут нулевой уровень в момент времени θ_2, и в этот момент приращение процесса переключается на приращение процесса $\xi_1(t)$, $X(\theta_2)=0$. Дальнейшие переключения на процессы $\xi_2(t)$ и $\xi_1(t)$ происходят в моменты $\theta_3,\ \theta_4,...$, поочередных достижений уровней b и 0, $X(\theta_{2k+1})=b,\ \ X(\theta_{2k})=0$. Значить,

$$X(t)=\xi_1(t-\theta_{2k})\quad \text{при}\quad \theta_{2k}\le t<\theta_{2k+1},$$

$$X(t)=b+\xi_2(t-\theta_{2k+1})\quad \text{при}\quad \theta_{2k+1}\le t<\theta_{2k+2},\ k=0,\ 1,\ 2,....$$

В данной работе найдено преобразование Лапласа-Стилтьеса стационарного распределения случайного процесса $X(t)$. Эта задача для случая $P\left(\eta_1^{(j)}=1\right)=1,\ \ j=1,2$ решалась в [1] и здесь используются метод и техника этой работы.

Из определения ясно, что $X(t)$ является регенерирующим случайным процессом с непрерывным временем. Моменты $\theta_2,\ \theta_4,...,\ \ \theta_{2k},...$ (последовательные моменты достижений нулевого уровня процессом $X(t)$) являются моментами регенерации, т.к. с вероятностью единица процесс $X(t)$ попадает в нуль и $E(\tau_++\tau_-)<\infty$. Времена между моментами регенерации являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, $E\theta_2=E\tau_++E\tau_-<\infty$. Вероятностные характеристики траектории случайного процесса $X(t)$ между моментами регенерации являются одинаковыми.

Регенерирующие процессы имеют многочисленные применения в различных областях прикладной математики. Библиографические сведения можно найти в [1].

Известно (см., например, [2, гл. 21, теорема 5.1]), что если промежутки времени между моментами регенерации имеют конечное среднее, то существует стационарное распределение для регенерирующего процесса $X(t)$.

Обозначим

$$\varphi_j(\lambda)=Ee^{\lambda\xi_1^{(j)}},\quad f_j(u)=Ee^{-u\eta_1^{(j)}},\quad j=1,2,$$

$$\Psi(u,\ \lambda)=\int_0^\infty e^{-ut}Ee^{\lambda X(t)}dt,\qquad \lim_{t\to\infty}P(X(t)<x)=F(x),$$

$$W(\lambda)=\int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x}dF(x).$$

Далее используется факторизация

$$1 - z\varphi_j(\lambda) = R_-^{(j)}(z,\ \lambda)\, R_+^{(j)}(z,\ \lambda),\ \ |z| < 1,\ \ Re\lambda = 0,$$

введенная в [2].

Отметим, что при отображении $z = f_j(u)$ множество $\{u : u \geq 0\}$ переходит в множество $\{z : 0 < z \leq 1\}$, а при малых $\delta > 0$ множество $\{u : 0 \leq u < \delta\}$ переходит внутрь множества $\{z : 1 - \gamma < z \leq 1\}$ при некотором $\gamma > 0$. Поэтому при $u > 0$ имеет место факторизации

$$1 - f_j(u)\,\varphi_j(u) = R_-^{(j)}(f_j(u), \lambda) R_+^{(j)}(f_j(u), \lambda)$$

со всеми известными свойствами их компонент.

Известно что [2], $(R_+^{(2)})^{-1}(1,\ \lambda) = \frac{Ee^{\lambda S_2}}{1-p_2}$, $(R_-^{(1)})(1,\ \lambda) = \frac{Ee^{\lambda S_1}}{1-p_1}$, где

$$S_1 = \inf_{k\geq 0} S_k^{(1)}, \quad p_1 = P(S_1 < 0) < 1, \quad S_2 = \sup_{k\geq 0} S_k^{(2)}, \quad p_2 = P(S_2 < 0) < 1.$$

Теорема. *Для преобразования Лапласа – Стилтьеса стационарного распределения процесса $X(t)$ справедливо следующее представление:*

$$W(\lambda) = \frac{E\eta_1^{(1)} Ee^{\lambda S_1} \lim\limits_{u\to 0} \left[(R_+^{(1)})^{-1}(f_1(u), \lambda)\right]^{[0,b)}}{\bar{a}(1-p_1)} + \\ + \frac{E\eta_1^{(2)} Ee^{\lambda S_2} e^{\lambda b} \lim\limits_{u\to 0} \left[(R_-^{(2)})^{-1}(f_2(u), \lambda)\right]^{(-b,0]}}{\bar{a}(1-p_2)},$$

в котором $u > 0$, $Re\lambda = 0$.

Литература

[1] Лотов В.И. О случайном блуждании с переключениями. Сибирские электронные математические известия. Том 15, (2018), С. 1320-1331.

[2] Borovkov A.A. Probability Theory. London: Springer-Verlag, 2013.

Асимптотические разложения функции распределения суммы независимых неодинаково распределенных с.в.

И.И.Шералиев

Наманганский инженерно-строительного институт

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ последовательность независимых случайных величин $EX_j = 0, \quad \sigma_j^2 = EX_j^2, \quad \alpha_j = EX_j^3, \quad \beta_j = E|X_j|^3, \quad j = 1, 2, ...$ Положим

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{B_n}, \quad B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2, \quad \Gamma_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j,$$

$$F_n(x) = P(S_n < x), \quad P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Пусть выполнены следующие условия:

(I) $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{{B_n}^2}{n} > 0, \qquad \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j < \infty;$

(II) $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{|x|>n^\tau} |x|^3 dF_j(x) \to 0, \quad n\to\infty$ для некоторого $\tau \in (0, \frac{1}{2})$.

При заданных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ считая $N > \varepsilon$ обозначим

$$\alpha_j(\varepsilon, N) = \max\{|f_j(t)|, \ \varepsilon \le |t| \le N\}.$$

(III) Сумма S_n называется асимптотически нерешетчатой, если $B_n \prod\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(\varepsilon, N) \to 0$ при $n \to \infty$ для любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ [1].

В случае одинаково распределенных независимых с.в. условия (I)-(II) совпадают с условием существования третьего абсолютного момента

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF(x), \qquad F(x) = P(X_1 < x).$$

Условие (I) равносильно существованию положительных постоянных g и G, таких что $B_n^2 \ge ng, \ \sum\limits_{j=1}^{n} E|X_j|^3 \le nG$ для всех достаточно больших n.

Теорема. *Пусть выполнены условия (I)-(III). Тогда* $\sup\left|F_n(x) - \Phi(x) - \frac{\Gamma_n}{6B_n^3}\left(1 - x^2\right)\varphi(x)\right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, *при* $n \to \infty$.

Это утверждение обобщает теорему Эссеена для различно распределенных случайных величин [1].

Литература

[1] Боровков А.А. Интегро-локальные и локальные теоремы о нормальных и больших уклонениях сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий. Теория вероятностей и ее применения, Т. 54. Вып. 4, 2009. С. 325-344.

Некоторые заметки о разделимых статистиках

У.Ш.Якубова[1], Н.Т.Парпиева[2]

[1] *Ташкентский государственный экономический университет*

[2] *Ташкентский государственный педагогический университет*

Пусть статистический критерий проверки гипотезы H_0 против сложной альтернативы H_1 основан на статистике $L = L(\cdot)$ и $\Im_\alpha$ есть критическая область этого критерия, определяемая по заданному размеру α. Нам достаточно ограничиться статистиками L, являющимися функциями вектора частот

$\nu = \nu(n)$, т.е. статистиками вида

$$L = L(\nu) = L\left(\nu_1, ..., \nu_N\right).$$

Среди статистик этого типа важное место занимает класс статистик, являющихся аддитивными функциями вектора частот. Они называются разделимыми статистиками.

Определение. *Статистика $L(\nu) = L\left(\nu_1, \ldots, \nu_N\right)$ называется разделимой статистикой, если она представима в виде*

$$L\left(\nu\right) = \sum_{m=1}^{N} f_m\left(\nu_m\right),$$

где для любого $m = 1, 2, \ldots, N$ функция $f_m\left(\nu_m\right)$ зависит, разве что, от ν_m, N и q_m.

Введем несколько обозначений: $\mathcal{L}\left(X\right)$ – закон распределения случайной величины X (или случайного вектора X), $\Pi_1\left(\lambda_1\right), \ldots, \Pi_N\left(\lambda_N\right)$ – независимые в совокупности пуассоновские случайные величины с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, соответственно.

Приведем следующее известное свойство полиномиального распределения: распределение случайного вектора частот исходов $\nu(n)$ совпадает с условным распределением случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ при условии, что $\xi_1 + \ldots + \xi_N = n$; здесь $\xi_1, \ldots, \xi_N$ – независимые в совокупности случайные величины, такие, что $\mathcal{L}\left(\xi_m\right) = \mathcal{L}\left(\Pi_m\left(np_m\right)\right), m = 1, 2, \ldots, N$. На языке введенных обозначений это свойство принимает вид:

$$\mathcal{L}\left(\nu_1, \ldots, \nu_N\right) = \mathcal{L}\left((\xi_1, \ldots, \xi_N)/\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\right).$$

Это соотношение в случае, когда статистика $L(\nu)$ является разделимой статистикой вида, приводит к равенству

$$\mathcal{L}\left(L(\nu)\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{m=1}^{N} f_m\left(\nu_m\right)\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{m=1}^{N} f_m\left(\xi_m\right)/\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\right);$$

что сводит изучение асимптотических свойств разделимых статистик к изучению таких же свойств условных распределений сумм независимых случайных величин определенного вида.

Еще одним аргументом в пользу рассмотрения разделимых статистик в качестве самостоятельного объекта исследования, определяющим целесообразность их выделения и изучения, служит то, что разделимыми статистиками являются статистики, по которым строится большинство классических статистических критериев проверки различных гипотез. В частности, разделимыми статистиками являются статистика отношения правдоподобия, статистика χ^2, а также статистики, построенные на случайной величине $\mu_r = \mu_r(n, p)$ – числе исходов, реализовавшихся при n испытаниях ровно r раз.